Esame di Teoria dei Segnali A

Ing. Informatica, Elettronica e Telecomunicazioni

4 settembre 2009

Esercizio 1

Tre navi di pirati si affrontano in mare. Ogni nave ha un cannone che, quando spara, colpisce il bersaglio con probabilità p. Ogni nave sceglie come bersaglio una a caso delle rimanenti due navi. Ad un certo istante le tre navi sparano contemporaneamente ed indipendentemente tra loro. Detto N il numero di navi colpite, si determini p in modo che $P\{N=1\}$ sia massima. Usando tale valore di p, si determini il valor medio $E[N]$.

Soluzione.

Diciamo A, B, C le tre navi. L'esperimento è composto da due sottoesperimenti in sequenza: 1) le navi scelgono indipendentemente tra loro i bersagli; 2) le navi sparano indipendentemente tra loro contro il bersaglio selezionato. Nella prima fase, ogni nave sceglie tra due bersagli equiprobabili, dunque vi sono $2^3 = 8$ possibili terne di bersagli selezionati tra loro differenti, ed equiprobabili. Tra queste, solo due hanno tutti e tre i bersagli tra loro differenti (A mira B, B mira C, C mira A e la sua simmetrica) mentre nelle restanti sei terne due dei bersagli coincidono (cioè due navi mirano allo stesso bersaglio). Definito l'evento $\mathcal{D}$ ={tre bersagli Differenti selezionati}, si ha dunque $P\{\mathcal{D}\} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, mentre la probabilità del complementare $\mathcal{D}^c$, cioè che due bersagli coincidano, è 3/4. Le probabilità associate al secondo sottoesperimento si trovano semplicemente condizionando all'uscita del primo sottoesperimento. Se si verifica $\mathcal{D}$, allora N rappresenta il numero di successi su 3 prove indipendenti con probabilità di successo p, dunque N condizionata a $\mathcal{D}$ ha distribuzione Binomiale(3,p), cioè

$$\begin{cases} P\{N=0\,|\,\mathcal{D}\} &= (1-p)^3 \\ P\{N=1\,|\,\mathcal{D}\} &= 3p(1-p)^2 \\ P\{N=2\,|\,\mathcal{D}\} &= 3p^2(1-p) \\ P\{N=3\,|\,\mathcal{D}\} &= p^3 \end{cases}$$

Se invece due bersagli coincidono, abbiamo

$$\begin{cases} P\{N=0\,|\,\mathcal{D}^c\} &= (1-p)^3 \\ P\{N=1\,|\,\mathcal{D}^c\} &= p(1-p)^2 + (1-p)(1-(1-p)^2) = p(1-p)(3-2p) \\ P\{N=2\,|\,\mathcal{D}^c\} &= p(1-(1-p)^2) \\ P\{N=3\,|\,\mathcal{D}^c\} &= 0 \end{cases}$$

poiché ad esempio $P\{N=2\,|\,\mathcal{D}^c\} = P\{$ chi punta da solo fa centro $\} \cdot (1-P\{$ entrambi quelli che puntano lo stesso bersaglio sbagliano$\} = p(1-(1-p)^2)$, dove il prodotto è dovuto all'indipendenza dei tiri.

Pertanto per il teorema della probabilità totale si ha

$$\begin{aligned} P\{N=1\} &= P\{N=1\,|\,\mathcal{D}\}P\{\mathcal{D}\} + P\{N=1\,|\,\mathcal{D}^c\}P\{\mathcal{D}^c\} \\ &= 3p(1-p)^2\frac{1}{4} + p(1-p)(3-2p)\frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}(1-p)\left(p(1-p)+p(3-2p)\right) \\ &= \frac{3}{4}p(1-p)(4-3p) \end{aligned}$$

A questo punto per trovare il punto di estremo relativo si annulla la derivata rispetto a p: $\frac{d}{dp}P\{N=1\} = 0$ (e poi si verifica che si tratta di un massimo relativo) ottenendo:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-p)(4-3p) - p(4-3p) - 3p(1-p) \\ &= (1-p)(4-6p) - p(4-3p) = 9p^2 - 14p + 4 \end{aligned}$$

con unica soluzione accettabile (minore di uno) $p = \frac{7-\sqrt{13}}{9} = 0.377$.

Infine la media si calcola col teorema della probabilità totale, usando $p = 0.377$:

$$\begin{aligned} E[N] &= E[N\,|\,\mathcal{D}]P\{\mathcal{D}\} + E[N\,|\,\mathcal{D}^c]P\{\mathcal{D}^c\} \\ &= \frac{1}{4}3p + \frac{3}{4}\left(1\cdot p(1-p)(3-2p) + 2\cdot p(1-(1-p)^2)\right) \\ &= 0.25 * 1.131 + 0.75 * (0.527 + 0.461) = 1.024 \end{aligned}$$

Esercizio 2

Un giocatore calcia una palla contro una parete. Fissiamo un asse delle ascisse lungo la parete. Detta X la coordinata del punto in cui la palla colpisce la parete ($X = 0$ corrispondendo al centro della parete), se la palla finisce entro 1 metro dal centro ($|X| < 1$) si vincono 100 punti, se tra 1 metro e 2 metri si vincono 50 punti, se tra due e tre metri si vincono 20 punti, altrimenti si vincono 0 punti. La densità di probabilità di X è Gaussiana con parametri $\eta = 0$ e $\sigma^2 = 4\, m^2$.

1. Calcolare la probabilità, in un tiro singolo, di fare 100 punti, 50 punti, 20 punti, e 0 punti.

2. Calcolare la probabilità di fare almeno 80 punti in 2 tiri.

Soluzione.
Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
P(100\,pt) = P\{|X| < 1\} &= 2P\{0 < X < 1\} = 2(F_X(1) - F_X(0)) \\
&= 2\left(\left[1 - Q\left(\frac{1-\eta}{\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\right) \\
&= 2(\frac{1}{2} - Q(1/2))
\end{aligned}
$$

Similmente si ha

$$
\begin{aligned}
P(50\,pt) = P\{1 < |X| < 2\} &= 2P\{1 < X < 2\} = 2(F_X(2) - F_X(1)) \\
&= 2\left(\left[1 - Q\left(\frac{2-\eta}{\sigma}\right)\right] - \left[1 - Q\left(\frac{1-\eta}{\sigma}\right)\right]\right) \\
&= 2(Q(1/2) - Q(2/2))
\end{aligned}
$$

e poi si ottiene $P(20\,pt) = P\{2 < |X| < 3\} = 2(Q(2/2) - Q(3/2))$ ed infine $P(0\,pt) = P\{|X| > 3\} = 2Q(3/2)$. Le funzioni Q si calcolano essere $Q(1/2) = 0.308$, $Q(1) = 0.159$ e $Q(3/2) = 0.069$, per cui si ottiene $P(100\,pt) = 0.384$, $P(50\,pt) = 0.298$, $P(20\,pt) = 0.180$, e $P(0\,pt) = 0.138$.

Per la seconda parte, detti P1 e P2 i punti guadagnati nel primo e secondo tiro, VA indipendenti ed identicamente distribuite con la PMF ricavata al punto precedente, condizionando al valore di uno dei due, per il teorema della probabilità totale si ottiene:

$$
\begin{aligned}
P\{P1 + P2 > 80\} &= P\{P1 + P2 > 80|\, P2 = 100\}P\{P2 = 100\} + P\{P1 + P2 > 80|\, P2 = 50\}P\{P2 = 50\} + \\
&\quad P\{P1 + P2 > 80|\, P2 = 20\}P\{P2 = 20\} + P\{P1 + P2 > 80|\, P2 = 0\}P\{P2 = 0\} \\
&= P\{P1 > 80 - 100\}P(100\,pt) + P\{P1 > 80 - 50\}P(50\,pt) + \\
&\quad P\{P1 > 80 - 20\}P(20\,pt) + P\{P1 > 80 - 0\}P(0\,pt) \\
&= 1 \cdot P(100\,pt) + (P(100\,pt) + P(50\,pt))P(50\,pt) + P(100\,pt)P(20\,pt) + P(100\,pt)P(0\,pt)
\end{aligned}
$$

dove si sono potuti togliere i condizionamenti grazie all'indipendenza tra P1 e P2, e si è usato il fatto che $P\{P1 > -20\} = 1$ poiché P1 è non negativo, e che $P\{P1 > 30\} = P\{P1 = 100\} + P\{P1 = 50\}$ e $P\{P1 > 60\} = P\{P1 = 100\}$, $P\{P1 > 80\} = P\{P1 = 100\}$.

Infine dal punto precedente si trova

$$
P\{P1+P2 > 80\} = P(100\,pt)[1+P(50\,pt)+P(20\,pt)+P(0\,pt)]+P(50\,pt)^2 = P(100\,pt)(2-P(100\,pt))+P(50\,pt)^2 \cong 0.71
$$

Esercizio 3

Nel piano (x, y) è assegnato il dominio D indicato in Figura 1 e definito come

$$
D = \{(x, y) :\ |x| \leq 1, |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|\}.
$$

Si consideri una coppia di variabili aleatorie X e Y con densità di probabilità congiunta costante sul dominio D e nulla altrove.

1. Determinare le funzioni densità di probabilità marginali $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$, e la funzione densità di probabilità condizionata $f_{Y|X}(y|x)$, e tracciarne il grafico.

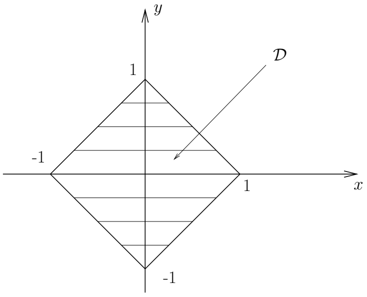

Figure 1: Dominio $\mathcal{D}$ della funzione densità di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie X e Y.

2. Detta $Z = X + Y$, determinare la funzione densità di probabilità di Z e tracciarne il grafico.

Soluzione.
Il dominio $\mathcal{D}$ è un quadrato di lato $\sqrt{2}$. Quindi

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se } (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Le funzioni densità di probabilità marginali si ottengono marginalizzando la funzione densità di probabilità congiunta. Essendo la funzione densità di probabilità $f_{XY}(x,y)$ simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si può concludere che le funzioni densità di probabilità marginali di X e Y hanno lo stesso andamento, cioè $f_X(x) = f_Y(x)$. Limitiamoci quindi a determinare $f_X(x)$. Si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Notiamo che se $|x| > 1$, allora $f_{XY}(x,y) = 0$ e quindi $f_X(x) = 0$. Nel caso che $|x| \leq 1$, essendo $f_{XY}(x,y)$ costante su $\mathcal{D}$, ed essendo il dominio $\mathcal{D}$ simmetrico rispetto all'asse y, si può concludere che $f_X(x)$ è pari, cioè $f_X(-x) = f_X(x)$. Nel caso in cui $0 \leq x \leq 1$, si ha:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1-x-x+1}{2} = 1-x.$$

Si può quindi concludere che

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Applicando la versione continua della formula di Bayes, si ottiene:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-|x|)} & \text{se } (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

2. Dobbiamo considerare la variabile aleatoria $Z = X + Y$. Per determinare la sua funzione densità di probabilità si può, per esempio, usare il metodo della variabile ausiliaria. Proviamo però ad applicare il metodo grafico, cioè cerchiamo di calcolare la funzione cumulativa di distribuzione di Z. Si ha:

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = P\{(X,Y) \in \mathcal{D}_z\}$$

dove $\mathcal{D}_z$ è mostrato in Figura 2. In particolare, il dominio $\mathcal{D}_z$ corrisponde al sempiano al di sotto della retta di equazione $y = -x + z$. In generale, siccome $f_{XY}(x,y)$ è non nulla solo su $\mathcal{D}$, si può concludere che

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\} = P\{(X,Y) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_z\}.$$

Per come è fatto il dominio $\mathcal{D}$ su cui è non nulla $f_{XY}(x,y)$, si possono avere varie situazioni a seconda del valore di z.

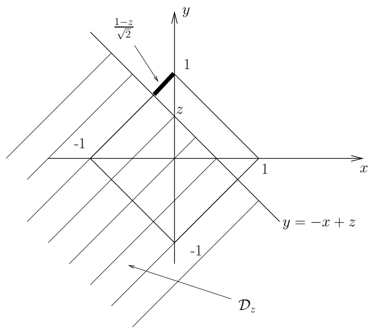

Figure 2: Dominio $\mathcal{D}_z$ usato nella funzione cumulativa di distribuzione di Z nell'Esercizio 2.

- Se $z > 1$, si ha che $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_z = \mathcal{D}$ e quindi $F_Z(z) = P\{(X,Y) \in \mathcal{D}\} = 1$.
- Se $z < -1$, allora $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_z = \varnothing$, e quindi $F_Z(z) = 0$.
- Se $-1 < z < 1$, allora dalla Figura 2 si conclude graficamente che $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_z$ è un rettangolo con lati $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} - \frac{1-z}{\sqrt{2}}$, rispettivamente. Quindi

$$F_Z(z) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \frac{1-z}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{1-z}{2} = \frac{1+z}{2}.$$

Ricapitolando, si ha:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \leq -1 \\ \dfrac{1+z}{2} & \text{se } -1 < z < 1 \\ 1 & \text{se } z \geq -1. \end{cases}$$

Derivando si ottiene:

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\left[U(z+1) - U(z-1)\right]$$

cioè che Z è uniformemente distribuita fra -1 ed 1.

Esercizio 4

Si consideri una VA continua X con PDF $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Si consideri la trasformazione $Y = 2X^2 - 4X$. Determinare:

- la correlazione $E[XY]$;
- la covarianza COV$[3X, Y]$.

Soluzione.
Siccome la $f_X(x)$ è simmetrica, allora tutti i momenti dispari sono nulli, pertanto $E[X] = E[X^3] = 0$. Invece

$$Var[X] = E[X^2] = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2\,.$$

Pertanto

$$E[XY] = E[X \cdot (2X^2 - 4X)] = 2E[X^3] - 4E[X^2] = -8$$

dove abbiamo usato la linearità dell'operatore E[.]. Similmente

$$Cov[3X, Y] = Cov[3X, 2X^2 - 4X] = 6Cov[X, X^2] - 12Cov[X, X] = -24$$

dove abbiamo sfruttato la bilinearità della covarianza, e il fatto che $Cov[X, X^2] = E[X \cdot X^2] - E[X]E[X^2] = 0 - 0 = 0$ e $Cov[X, X] = Var[X] = 2$.