

Capitolo 5

Antenne

5.1 Antenna

Si definisce antenna una struttura di raccordo tra un dispositivo guidante e lo spazio libero che serve per trasmettere/ricevere energia elettromagnetica.

5.2 Dipolo corto

Si definisce dipolo corto o hertziano un'elemento di corrente di lunghezza d , avente d molto minore della lunghezza d'onda λ , lungo il quale scorre una corrente I_0 . Tipicamente il dipolo si dice corto se $d < \frac{\lambda}{50}$.

La corrente varia sinusoidalmente nel tempo: $I(t) = \text{Re}\{I_0 e^{i\omega t}\} = I_0 \cos \omega t$. I dovrebbe essere nulla agli estremi del dipolo, tuttavia la tratteremo come se fosse costante su tutta la lunghezza. Il dipolo corto rappresenta l'esempio più semplice di antenna che si possa avere, in quanto consiste di un'elemento di corrente lineare con corrente costante su tutta la lunghezza. Le antenne più complesse possono essere viste come l'insieme di tanti elementi di questo tipo con correnti opportune.

Si consideri $d \rightarrow 0$ e $I_0 \rightarrow \infty$ in modo che il prodotto $I_0 d$ si mantenga costante; questo equivale a considerare una sorgente puntiforme. Calcolando il campo elettromagnetico generato da una sorgente siffatta si trovano le seguenti espressioni del campo elettromagnetico nel punto $P(r, \theta, \varphi)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_r = 0 \\ H_\theta = 0 \\ H_\varphi = \frac{I_0 d}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta e^{-jkr} \\ E_r = \eta \frac{I_0 d}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos \theta e^{-jkr} \\ E_\theta = \eta \frac{I_0 d}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin \theta e^{-jkr} \\ E_\varphi = 0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

dove $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ è impedenza intrinseca del mezzo e $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Le espressioni (5.1) sono valide ovunque tranne che nella regione occupata dalla sorgente. A grande distanza

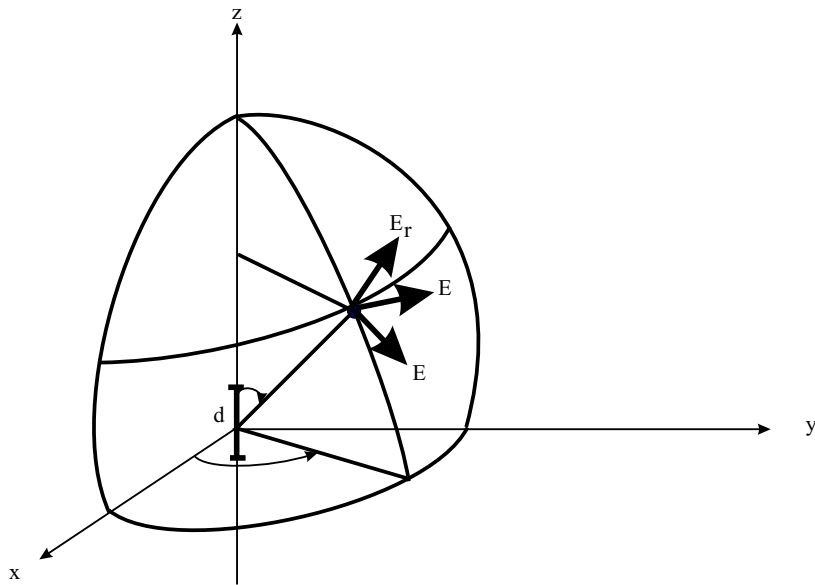


Figura 5.1: In un sistema di coordinate sferiche, il campo $\overline{E}$ ha tre componenti E_r , E_θ , E_φ .

$kr \gg 1$ cioè $r \gg \lambda$, i termini $\frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{r^3}$ sono trascurabili rispetto a quelli $\frac{1}{r}$. Quindi le uniche componenti non trascurabili sono:

$$\begin{cases} E_\theta = j\eta \frac{I_0 d}{2\lambda} \sin \frac{\theta}{r} e^{-jkr} \\ H_\varphi = j \frac{I_0 d}{2\lambda} \sin \frac{\theta}{r} e^{-jkr} \end{cases} \quad (5.2)$$

Queste si dicono componenti lontane. Le altre componenti si dicono vicine.

Si osservi che

$$\overline{H} = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times \overline{E} = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times E_\theta \hat{\theta} = \frac{1}{\eta} E_\varphi \hat{\varphi}.$$

Le linee di forza di $\overline{H}$ sono circonferenze con centro sull'asse del dipolo, giacenti su piani perpendicolari al dipolo stesso.

Il campo elettrico giace su piani passanti per l'asse del dipolo e ha componente radiale non nulla che diviene però trascurabile a grandi distanze. Nel caso del dipolo corto si ha un'onda TM che diventa TEM a grandi distanze. Si calcoli la potenza irradiata attraverso una sfera di raggio r centrata sull'origine:

$$P = \int \overline{S} \cdot \hat{n} ds.$$

Ricordando che

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \overline{E} \times \overline{H}^*$$

$$P = \frac{1}{2} \int_s \overline{E} \times \overline{H}^* \cdot \hat{r} dS \quad \text{dove} \quad dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\overline{E} \times \overline{H}^* = \left[(E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}) \times H_\varphi^* \hat{\varphi} \right] \cdot \hat{r} = (-E_r H_\theta^* + E_\theta H_\varphi^*) \cdot \hat{r} = E_\theta H_\varphi^*$$

$(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ sono una terna destrorsa per cui $\hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{r}$.

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta r^2 E_\theta H_\varphi^* = \pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta r^2 E_\theta H_\varphi^*.$$

Calcoliamo il prodotto $E_\theta H_\varphi^*$ considerando sia le componenti lontane che le componenti vicine:

$$\begin{aligned}
E_\theta H_\varphi^* &= \eta \frac{I_0 d}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin \theta e^{-jkr} \cdot \frac{I_0 d}{4\pi} \left(-\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta e^{-jkr} = \\
&= \eta \frac{I_0^2 d^2}{(4\pi)^2} \sin^2 \theta \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{j}{kr^5} \right) \\
P &= \pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta r^2 \left[\eta \frac{I_0^2 d^2}{(4\pi)^2} \sin^2 \theta \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{j}{kr^5} \right) \right] = \\
&= \frac{\eta \pi I_0^2 d^2}{(4\pi)^2} \int_0^\pi \left(k^2 \sin^3 \theta - \frac{j \sin^3 \theta}{kr^3} \right) d\theta
\end{aligned}$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \\
&= \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \left[+1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\eta \pi}{3} I_0^2 \frac{d^2}{\lambda^2} - j \eta \pi \frac{I_0^2 d^2}{16\pi^2} \frac{4}{3} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{r^3} = \\
&= \frac{\eta \pi}{3} I_0^2 \frac{d^2}{\lambda^2} - j \eta I_0^2 \frac{1}{24\pi^2} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{r} \right)^3.
\end{aligned}$$

La parte reale di P , che rappresenta la potenza attiva, è indipendente da r . A formare questa contribuiscono solo le componenti lontane (termini radiativi). La parte immaginaria rappresenta la potenza reattiva; essa riceve contributo dalla sole componenti vicine del campo (termini reattivi).

5.3 Momento equivalente

La quantità $\overline{M} = I_0 d \hat{z}$ è detta momento equivalente del dipolo corto. Consideriamo una sorgente di forma generica con volume V . Ogni sorgente ha un proprio momento equivalente definito come

$$\overline{M} = \int_V \overline{J}_i(\vec{r}') e^{jk\vec{r}' \cdot \hat{r}} dV$$

dove V è il volume della sorgente, $\bar{J}_i$ è la densità di corrente volumetrica, k è il modulo

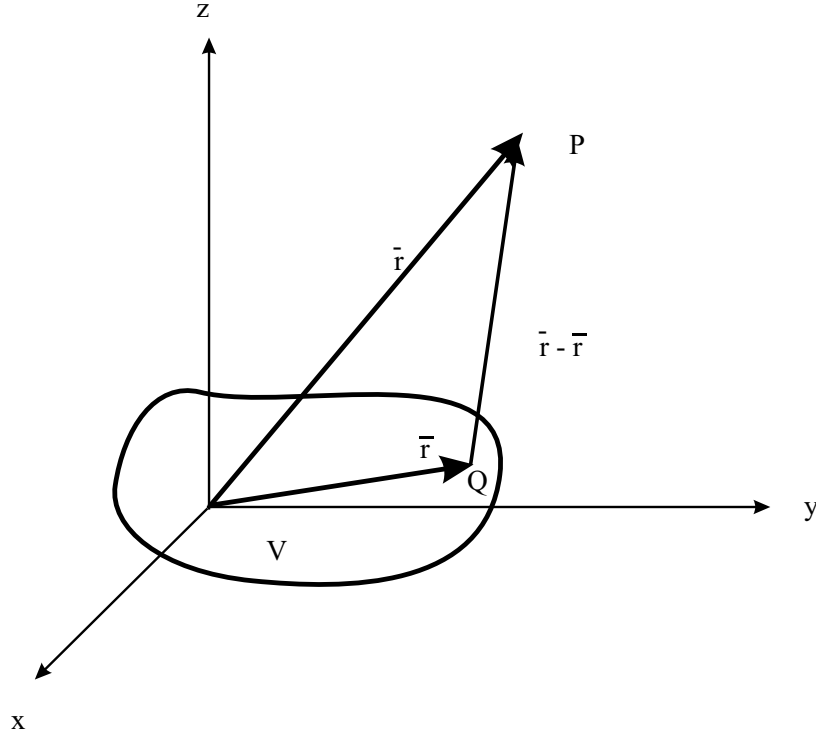


Figura 5.2: Il momento equivalente $\bar{M}$ permette di calcolare il campo nel punto P generato dalla sorgente generica di volume V .

del vettore d'onda, $\bar{r}'$ il vettore posizione dei punti che costituiscono la sorgente.

La sorgente può essere vista come una infinità di sorgenti puntiformi che generano onde di tipo sferico.

Nel punto $P(\bar{r} = r\hat{r})$ il campo è la somma di tutti i contributi delle sorgenti puntiformi.

Il momento equivalente dipende solo dalla direzione $\hat{r}$ del punto P e non dalla distanza.

Lungo certe direzioni i contributi delle sorgenti puntiformi si sommano in fase, lungo altre direzioni danno luogo a interferenza distruttiva.

Il momento equivalente permette di generalizzare le espressioni dei campi e del vettore di Poynting a grande distanza:

$$E_\theta = j\eta \frac{M}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r}; \quad (5.3)$$

$$H_\varphi = j \frac{M}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r}; \quad (5.4)$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{\eta}{8\lambda^2} M^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}. \quad (5.5)$$

5.4 Grandezze caratteristiche delle antenne

Il campo elettrico a grande distanza irradiato da una generica sorgente avente momento equivalente $\bar{M}$ nel punto $P(r, \theta, \varphi)$ è dato da:

$$\bar{E}(r, \theta, \varphi) = \underbrace{j\eta \frac{M(\theta, \varphi)}{2\lambda} \sin \theta}_{\theta, \varphi} \underbrace{\frac{e^{-jkr}}{r}}_r \hat{\theta} = \bar{E}(\theta, \varphi) \frac{e^{-jkr}}{r}$$

dove $\bar{E}(\theta, \varphi)$ è così definito

$$\bar{E}(\theta, \varphi) = j \frac{\eta}{2\lambda} \sin \theta |\bar{M}(\theta, \varphi)| \hat{\theta}$$

Analogamente il campo magnetico si può scrivere come:

$$\bar{H} = \frac{e^{-jkr}}{\eta r} E(\theta, \varphi) \hat{\varphi}$$

Il vettore di Poynting è:

$$S = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{|\bar{E}(\theta, \varphi)|^2}{2\eta r^2} \hat{r}.$$

La potenza irradiata può essere calcolata come flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie sferica di raggio r :

$$\begin{aligned} W_a &= \int_s \frac{|\bar{E}(\theta, \varphi)|^2}{2\eta r^2} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\bar{E}(\theta, \varphi)|^2}{2\eta} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^{4\pi} \frac{|\bar{E}(\theta, \varphi)|^2}{2\eta} d\Omega = \int_0^{4\pi} I_r(\theta, \varphi) d\Omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nel caso di sorgente isotropa $W_0 = 4\pi I_r^0$ dove I_r^0 è l'intensità di radiazione isotropa. Si definisce $I_r(\theta, \varphi)$ intensità di radiazione:

$$I_r(\theta, \varphi) = |\bar{S}|r^2 = \frac{|\bar{E}(\theta\varphi)|^2}{2\eta} = \frac{|\bar{E}|^2}{2\eta}. \quad (5.7)$$

I_r rappresenta la potenza irradiata per unità di angolo solido e dipende solo da θ e φ , non da r .

Sia $I_r(P)$ l'intensità di radiazione nella direzione individuata dal punto P e $I_r(M)$ nella direzione individuata dal punto M (direzione di riferimento).

Si definisce intensità di radiazione normalizzata:

$$i_r(\theta, \varphi) = \frac{I_r(P)}{I_r(M)} = \frac{|\bar{E}(P)|^2}{|\bar{E}(M)|^2}. \quad (5.8)$$

Per convenzione si assume M in corrispondenza della direzione per cui $|\bar{E}|$ è massimo, quindi $i_r(\theta, \varphi) \leq 1$. Un'antenna si dice isotropa se irradia uniformemente in tutte le direzioni cioè $i_r(\theta, \varphi) = 1$.

Si definisce funzione di radiazione della sorgente la grandezza:

$$f(\theta, \varphi) = \sqrt{i_r(\theta, \varphi)}. \quad (5.9)$$

In un sistema di coordinate sferiche (s, θ, φ) , l'equazione

$$s = f(\theta, \varphi) \quad (5.10)$$

definisce una superficie chiusa che è detta superficie di radiazione. L'intersezione di tale superficie con un generico piano passante per l'origine è detta diagramma di radiazione della sorgente nel piano considerato. Un'antenna si dice omnidirezionale in un dato piano se il suo diagramma di radiazione su quel piano è una circonferenza. Definita l'intensità massima della sorgente come

$$I_r^{max} = \max\{I_r(P)\}.$$

Si definisce (guadagno in) direttività D

$$D = \frac{\int_0^{4\pi} I_r^{max} d\Omega}{\int_0^{4\pi} I_r d\Omega} = \frac{4\pi I_r^{max}}{\int_0^{4\pi} I_r d\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} i_r d\Omega} = \frac{W_0}{W_a} \quad (5.11)$$

dove W_a è la potenza emessa dall'antenna, e W_0 la potenza che emetterebbe un'antenna isotropa con intensità I_r^{max} .

Si definisce rendimento δ di un'antenna il rapporto tra la potenza irradiata e la potenza assorbita W_L

$$\delta = \frac{W_a}{W_L}. \quad (5.12)$$

Poichè $W_L \geq W_a$, se W_d è la potenza dissipata

$$W_L = W_a + W_d.$$

In termini circuitali, un generatore di tensione vede l'antenna come un carico avente impedenza Z_L . La potenza fornita al carico vale

$$P_L = \frac{1}{Z} Z_L |I|^2$$

In generale $P_L = W_L + jQ_L$, per la potenza attiva assorbita dall'antenna si potrà scrivere

$$W_L = \frac{1}{2} R_L |I|^2.$$

Si può pensare a R_L come alla serie di due resistenze R_{irr} e R_d .

R_{irr} si dice resistenza di radiazione; si ottiene imponendo che tra la potenza irradiata W_a e la corrente I ai morsetti dell'antenna sussista una relazione analoga alla legge di Joule:

$$W_a = \frac{1}{2} R_{irr} |I|^2.$$

Alla resistenza di dissipazione R_d si possono imputare le perdite per dissipazione

$$W_d = \frac{1}{2} R_d |I|^2.$$

Da cui si ottiene:

$$\delta = \frac{W_a}{W_L} = \frac{W_a}{W_a + W_d} = \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_d}.$$

Si definisce guadagno in potenza:

$$G = \frac{W_0}{W_L} = \frac{W_0}{W_0} \cdot \frac{W_a}{W_L} = D\delta$$

con W_0 potenza irradiata da un'antenna isotropa con intensità di radiazione I_r^{max} , W_L potenza assorbita dall'antenna.

5.5 Angolo solido o area del fascio Ω_A

$$\Omega_A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi i_r(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{4\pi} i_r(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

L'angolo solido del fascio Ω_A è definito come l'integrale dell'intensità di radiazione normalizzata su tutto l'angolo solido (su una sfera), è misurato in steradiani. Ω_A si può vedere come l'angolo solido in cui si avrebbe tutto il flusso di potenza dell'antenna se la sua intensità di radiazione normalizzata fosse costante e pari al suo valore massimo per tutti gli angoli all'interno di Ω_A e zero altrove. Per un'antenna isotropa $i_r = 1$, $\Omega_A = 4\pi$.

Poichè la direttività D è così definita

$$D = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} i_r d\Omega}$$

ne segue che

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_A}.$$

Se l'angolo solido può essere così approssimato

$$\Omega_A \simeq \theta_{1r} \theta_{2r}$$

θ_{1r} : Half Power Beam Width (HPBW), larghezza del fascio a metà potenza su un piano (in radianti);

θ_{2r} : HPBW su un piano perpendicolare al precedente. Si ha la seguente formula approssimata, di grande utilità per la direttività

$$D = \frac{4\pi}{\theta_{1r} \theta_{2r}}.$$

Se gli angoli sono misurati in gradi si ottiene

$$D \simeq \frac{40.000}{\theta_{1d}\theta_{2d}}$$

dove θ_{1d} e θ_{2d} angoli misurati in gradi.

Spesso è conveniente separare Ω_A in due componenti:

Ω_M dovuta al lobo principale

Ω_m dovuta ai lobi secondari

$$\Omega_A = \Omega_M + \Omega_m$$

Si definisce efficienza del fascio $\epsilon = \frac{\Omega_M}{\Omega_m}$, da non confondere con il rendimento δ .

5.6 Antenne in ricezione

L'antenna in ricezione riceve una certa potenza e la trasferisce al carico.

La potenza trasferita dipende:

- dall'impedenza di carico Z_L ;
- dalla direzione verso cui è puntata l'antenna ricevente;
- dalla polarizzazione del campo che investe l'antenna ricevente.

Sia P_R il valore massimo che assume la potenza ricevuta al variare dei precedenti parametri.

Si definisce area efficace A_{eff} la quantità:

$$A_{eff} = \frac{P_R}{\frac{1}{2} \frac{|\overline{E}|^2}{\eta}}$$

dove $\overline{E}$ è il campo elettrico indotto dall'antenna trasmittente e misurato in assenza dell'antenna ricevente nel punto dello spazio in cui è collocata quest'ultima ($\overline{E} \cdot \overline{E}^*$ può ritenersi costante nella zona occupata dall'antenna).

5.7 Grandezze caratteristiche del dipolo corto

- Momeno equivalente di un dipolo hertziano:

In questo caso $\bar{J}_i \rightarrow I_0 \hat{z}$ si ha una densità di corrente lineare; $\bar{r}' = z \hat{z}$

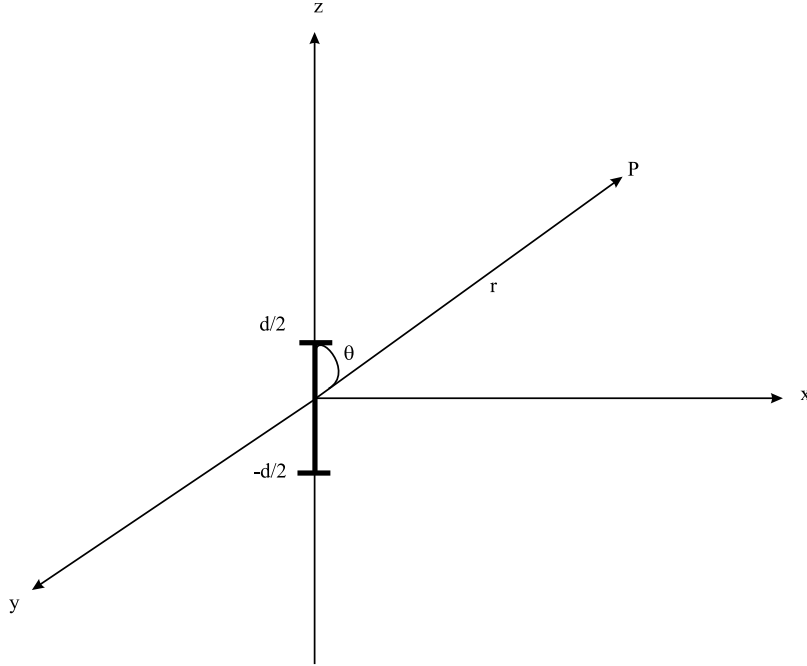


Figura 5.3: Dipolo di lunghezza d .

$$\begin{aligned}
 \bar{M} &= \int_{-d/2}^{d/2} I_0 \hat{z} e^{jkz \hat{z} \cdot \hat{r}} dz = I_0 \hat{z} \int_{-d/2}^{d/2} I_0 e^{jkz \cos \theta} dz = \\
 &= \frac{1}{jk \cos \theta} I_0 \hat{z} e^{jk \cos z} \Big|_{-d/2}^{d/2} = \\
 &= \frac{1}{jk \cos \theta} I_0 \hat{z} \left[e^{jk \cos \theta d/2} - e^{-jk \cos \theta d/2} \right] = \\
 &= \frac{1}{jk \cos \theta} I_0 \hat{z} \left[2j \sin(k \cos \theta \frac{d}{2}) \right] \simeq I_0 \hat{z} \frac{2jk \cos \theta d/2}{jk \cos \theta} = d I_0 \hat{z}
 \end{aligned}$$

- Campo elettrico:

$$E_\theta(r, \theta, \varphi) = \underbrace{j\eta \frac{I_0 d}{2\lambda} \sin \theta}_{E(\theta, \varphi)} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

- Intensità di radiazione:

$$I_r(\theta, \varphi) = |\bar{S}|r^2 = \frac{|\bar{E}(\theta, \varphi)|^2}{2\eta}$$

$$I_r(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\eta} \left| \eta \frac{I_0 d}{2\lambda} \sin \theta \right|^2 = \frac{\eta}{8} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_0^2 \sin^2 \theta.$$

- La potenza irradiata si ottiene integrando I_r su tutto l'angolo solido:

$$\begin{aligned} W_a &= \int_0^{4\pi} I(\theta, \varphi) d\Omega = \frac{\eta}{8} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\eta}{8} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_0^2 2\pi \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \\ &= \frac{\eta\pi}{3} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_0^2 \end{aligned}$$

- Intensità di radiazione normalizzata:

$$i_r(\theta, \varphi) = \frac{I_r}{I_r^{max}} = \frac{\frac{\eta}{8} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_0^2 \sin^2 \theta}{\frac{\eta}{8} \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_0^2} = \sin^2 \theta$$

- Funzione di radiazione:

$$f = \sqrt{i_r} = |\sin \theta|.$$

Si noti che i_r e f non dipendono da φ , per cui sono simmetriche rispetto all'asse z . Il dipolo è omnidirezionale nel piano (x, y) . Il diagramma di radiazione che si ottiene sezionando la figura con tale piano è una circonferenza. Il diagramma di radiazione ottenuto sezionando la superficie con un piano contenente l'asse z è simile a un numero 8 rovesciato.

- Resistenza di radiazione:

può essere calcolata a partire dalla potenza W_a irradiata dal dipolo

$$W_a = \frac{1}{2} R_{irr} I_0^2 = \frac{\eta\pi}{3} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 I_0^2;$$

$$R_{irr} = \frac{2}{3} \eta\pi \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2.$$

- Direttività D :

$$D = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} i_r d\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} 2\pi \frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$$

- Area efficace:

Il rapporto $\frac{A_{eff}}{D} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$ non dipende dell'antenna ma è una costante universale

$$A_{eff} = D \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2.$$

5.8 Antenne filiformi

In un dipolo hertziano si suppone che la distribuzione di corrente sia costante; questa approssimazione è valida solo per antenne molto corte. Se si considerano antenne con lunghezza finita, questa approssimazione non è più valida e le correnti possono essere descritte con funzioni sinusoidali del tipo:

$$\bar{I} = \begin{cases} I_0 \sin[k(\frac{d}{2} - z)] \hat{z} & 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \\ I_0 \sin[k(\frac{d}{2} + z)] \hat{z} & -\frac{d}{2} \geq z \geq 0. \end{cases}$$

In particolare

$$\text{se } d = \frac{\lambda}{4} \quad \text{si ha } \bar{I} = I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{8} - z \right) \right] \hat{z} = I_0 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \hat{z}$$

nel centro del dipolo, cioè in $z = 0$, si ha $= I_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z}$;

$$\text{se } d = \frac{\lambda}{2} \quad \text{si ha } \bar{I} = I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{4} - z \right) \right] \hat{z} = I_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \hat{z}$$

in $z = 0$ si ha $I = I_0 \hat{z}$.

5.9 Dipoli mezz'onda

La corrente che fluisce nel dipolo ha distribuzione simmetrica rispetto al centro e zero agli estremi:

$$i(t) = I_0 \cos \omega t \cos kz = \operatorname{Re} \left\{ I_0 \cos kz e^{j\omega t} \right\}$$

per $z = \pm \frac{\lambda}{4}$ si ha $\cos \pm \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \cos \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = 0$.

Il fasore è dato

$$I(z) = I_0 \cos kz \quad -\frac{\lambda}{4} \leq z \leq \frac{\lambda}{4}$$

Per un dipolo corto di lunghezza d

$$E_\theta(r, \theta, \varphi) = j\eta \frac{I_0 d}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (V/m)$$

adattiamo questa espressione al caso di un dipolo di lunghezza infinitesima dz eccitato da una corrente $I(z)$ e collocato ad una distanza s dal punto di osservazione (quindi $d \rightarrow dz$, $I_0 \rightarrow I(z)$, $r \rightarrow s$)

$$dE_\theta(z) = j\eta \frac{I(z)dz}{2\lambda} \sin \theta_s \frac{e^{-jks}}{s}.$$

Il campo magnetico associato è

$$dH_\varphi(z) = \frac{dE_\theta(z)}{\eta}.$$

Il campo irradiato dall'intera antenna si ottiene integrando i campi generati dai dipoli infinitesimi che costituiscono l'antenna

$$E_\theta = \int_{z=-\lambda/4}^{1/4} dE_\theta.$$

Per il calcolo dell'integrale è necessario fare due approssimazioni:

1) fattore $1/s$

La distanza s tra l'elemento di corrente dz e il punto di osservazione Q è considerata molto grande rispetto alla lunghezza del dipolo ($s \gg \lambda/2$) cosicchè $s = R$

$$1/s = 1/r \quad \text{e} \quad \theta_s = \theta$$

l'errore $\Delta = R - s$ è massimo quando Q è sull'asse del dipolo ed è pari a $\lambda/4$, se $R \gg \lambda$ l'errore non è significativo.

2) fattore di fase e^{-jks}

$$k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Vale la regola per cui un errore nella fase maggiore di $\pi/8$ non è accettabile. L'approx $s \approx R$ non si può fare per la fase, è meglio usare l'approx. di raggi paralleli:

$$S = R - z \cos \theta.$$

Quindi

$$dE_\theta = j\eta \frac{I(z)dz}{2\lambda} \frac{e^{-jkR}}{R} \sin \theta e^{jkz \cos \theta}$$

$$I(z) = I_0 \cos kz$$

Facendo l'integrale si ottiene:

$$E_\theta = j60I_0 \left[\frac{\cos \left[(\pi/4) \cos \theta \right]}{\sin \theta} \right] \frac{e^{-jkR}}{R}$$

$$H_\varphi = \frac{E_\varphi}{\eta}$$

Densità di potenza mediata nel tempo:

$$S(r, \theta) = \frac{15I_0^2}{\pi r^2} \left[\frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \right] = S_0 \left[\frac{\cos^2[(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \right] [W/m^2]$$

$$I(r, \theta) = \delta(r, \theta, \varphi) r^2$$

In particolare $S(r, \theta)$ è massimo per $\theta = \frac{\pi}{2}$ e si ottiene $S_{max} = S_0 = \frac{15I_0^2}{\pi r^2}$.

Da cui

$$i_r = \frac{S(r, \theta)}{S_{max}} = \left[\frac{\cos(\pi/2 \cos \theta)}{\sin \theta} \right]^2.$$

. Direttività di un dipolo $\lambda/2$

$$W_a = r^2 \iint_{4\pi} S(r, \theta) d\Omega = 36.6 I_0^2$$

$$D = \frac{4\pi r^2 S_{max}}{P_{rad}} = \frac{15I_0^2}{36.6 I_0^2} = 1.64$$

. Resistenza di radiazione

$$R_{rad} = \frac{2P_{rad}}{I_0^2} = \frac{2 \times 36.6 I_0^2}{I_0^2} = 73\Omega$$

5.10 Formula di Trasmissione di Friis

Viogliamo trovare una relazione tra P_t (Potenza fornita all'antenna in trasmissione) e P_r potenza fornita al ricevitore dall'antenna ricevente.

Supponiamo che entrambe le antenne siano adattate alle loro rispettive linee di trasmissione.

Consideriamo il caso che il picco del diagram ma di radiazione di ogni antenna sia nella direzione dell'altra antenna

Iniziamo considerando l'antenna trasmittente come un radiatore isotropo senza perdite.

La densità di potenza che incide sopra l'antenna ricevente a distanza R è uguale alla potenza trasmessa P_T diviso l'area della superficie sferica di raggio R

$$S_{iso} = \frac{P_{Tt}}{4\pi R^2}$$

In realtà l'antenna trasmissittente non è isotropa e ha dissipazione. La Densità di potenza irradiata dall'antenna reale è

$$S_r = G_T S_{iso} = \delta_T D_T S_{iso} = \frac{\delta_T D_T P_T}{4\pi R^2}$$

δ : solo una parte della potenza fornita all'antenna è irradiata

$$\delta = \frac{W_a}{P_T}$$

D_T : direttività dell'antenna trasmittente (nella direzione dell'antenna ricevente)

Ricordo che

$$A_T = \frac{\lambda^2 D_T}{4\pi} \quad D_T = \frac{4\pi A_t}{\lambda^2}$$

$$S_r = \frac{\delta_t P_t}{4\pi R^2} \cdot \frac{4\pi A_t}{\lambda^2} = \frac{\delta_t A_t P_t}{\lambda^2 R^2}$$

Dalla parte dell'antenna ricevente: la potenza intercettata è uguale e

$$P_{int} = S_r \cdot A_r = \frac{\delta_T A_T A_r P_T}{\lambda^2 R^2}.$$

La potenza ricevuta è uguale alla potenza intercettata moltiplicata per l'efficienza dell'antenna ricevente

$$P_R = \delta_R \cdot P_{int}$$

$$P_R = \frac{\delta_r A_r A_t P_t}{\lambda^2 R^2}$$

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{\delta_T \delta_R A_R A_T R_T}{\lambda^2 R^2} = \frac{\delta_t \delta_r}{\lambda^2 R^2} \cdot \frac{\lambda^2 D_t}{4\pi} \cdot \frac{\lambda^2 D_r}{4\pi} = G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2$$

Se le due antenne non sono orientate nella direzione per cui si ha massimo trasferimento di potenza

$$\frac{P_r}{P_t} = G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 i_t(\theta_t, \varphi_t) i_r(\theta_r, \varphi_r).$$

5.11 Progetto di massima di un radio collegamento

Formula di trasmissione o di *Friis* :

$$P_R = P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2. \quad (5.13)$$

La (5.13) è il punto di partenza per il dimensionamento di massima di una tratta radio. Tuttavia la (5.13) vale solo in condizioni ideali. Per una descrizione più realistica è necessario considerare due fatti fondamentali. Anzitutto, escludendo il caso del radiocollegamento tra veicoli spaziali, normalmente la propagazione del campo elettromagnetico non avviene in un mezzo normale (non dispersivo stazionario, lineare e isotropo) omogeneo e privo di perdite. Al contrario, nel mezzo interposto tra le due antenne si possono verificare vari fenomeni come precipitazioni atmosferiche, presenza di ostacoli il cui risultato è un'attenuazione supplementare della potenza ricevuta che si può indicare con A_s ($A_s \gg 1$) per cui la (5.13) diviene

$$P_R = P_T \frac{G_T G_R}{A_s} \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2. \quad (5.14)$$

Inoltre l'antenna ricevente capta e trasferisce al ricevitore, oltre al segnale utile di potenza P_R , anche altri segnali indesiderati che si possono genericamente classificare come rumore. Si indichi con N la potenza media di rumore ceduta all'impedenza di ingresso del ricevitore. Al fine di garantire un'accettabile qualità di ricezione, cioè la possibilità di eseguire la ricostruzione del segnale con un tasso di errore accettabile, occorre che il rapporto segnale-rumore all'ingresso del ricevitore sia superiore a un valore minimo fissato mediante considerazioni di sistema. Si ha quindi la condizione:

$$\frac{P_R}{M} > P_{min} \quad \text{ovvero} \quad P_R > N P_{min}$$

Dalla (5.14) si ha:

$$\begin{aligned} P_T \frac{G_T G_R}{A_S} \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 &> N \rho_{min} \\ P_T G_T G_R &> N \rho_{min} A_o A_s. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dove $A_0 = \left(\frac{4\pi R}{\lambda^2} \right)^2$

Nella pratica è normale esprimere le grandezze in unità logaritmiche. Per le potenze si ha

$$P[dBm] = 10 \log_{10} P[mW].$$

Per una generica grandezza

$$G[dB] = 10 \log_{10} G.$$

In unità logaritmiche la (5.15) diventa

$$P_T[dBm] + G_T[dB] + G_R[dB] > N[dBm] + \rho_{min}[dB] + A_o[dB] + A_s[dB]. \quad (5.16)$$

La (5.16) consente di individuare i compromessi fondamentali che sono alla base del progetto di un radio collegamento.

A 2^o membro compaino i Principali effetti che generano richiesta di potenza da parte della tratta radio:

- la potenza di rumore ricevuta;
- la qualità di ricezione prescritta;
- l'attenuazione complessiva.

A 1^o membro compaino i gradi di libertà del progettista:

- la potenza erogata dal trasmettitore;
- i guadagni delle due antenne.

La ripartizione della potenza richiesta tra questi due termini è dettata da considerazioni di sistema (fattibilità tecnologica ed economicità). Si considerino due casi estremi ma di notevole importanza pratica; quello della radio diffusione e quello del collegamento tra satellite geostazionario e stazione di terra. Nel primo caso l'antenna trasmittente deve rendere disponibile il segnale in tutti i punti di un'area geografica con ampiezza tale che qualunque ricevitore sia in grado di captare la trasmissione con qualità accettabile. La trasmittente ha guadagno molto basso, spesso è omnidirezionale sul piano orizzontale. Le caratteristiche dell'antenna ricevente non sono determinabili a priori. È necessario garantire il servizio andare per guadagni molto bassi dell'antenna ricevente. Ne segue che si aumenta molto P_T , che può raggiungere valori di 100 – 900 KW.

Nel secondo caso vi sono limiti fisici, dovuti a problemi di alimentazione, alla potenza che può essere irradiata dal trasmettitore situato a bordo del satellite (al max 100 W). Vi sono inoltre anche limiti fisici alle dimensioni e quindi al guadagno delle antenne trasmettenti installabili a bordo dei satelliti. Inoltre la lunghezza della tratta è fissata dalla condizione di geostazionarietà ($r = 36000$ km), per cui A_o assume valori elevati (ad esempio $A_o \simeq 204$ dB a 10 GHz).

A tutto ciò fa fronte l'elevato guadagno dell'antenna ricevente della stazione di terra. A questo scopo si usano di solito parabolidi di dimensioni molto elevate.

Riprendiamo la formula di Friis (5.14):

$$P_R = \frac{G_R}{A_s A_o} G_T P_T.$$

Si definisce ERP (Effective Radiated Power) il prodotto $G_T P_T$. L'ERP è una cifra di merito del sistema trasmittente in quanto definisce le prestazioni senza bisogno di separare i contributi G_T e P_T .

Per quanto riguarda la sezione ricevente, un parametro importante è il rapporto segnale rumore $\frac{P_R}{N}$.

La potenza di rumore N è data da $N = k_B T_{sys} B$ dove $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/k, T_{sys} è la temperatura di rumore del sistema, B è la larghezza di banda del ricevitore. T_{sys} è riferita ai morsetti di uscita dell'antenna. T ingloba sia il rumore elettromagnetico captato dall'antenna, sia il rumore generato dall'elettronica a basso rumore.

G_R e T sono entrambi a disposizione del progettista, che può sceglierli secondo un criterio di mera economicità purch'è soddisfinò il $\frac{P_R}{M}$ richiesto. $\frac{G_R}{T}$ è quindi una cifra di merito del sistema ricevente.

5.12 Esercizi

Esercizio n.1

Un dipolo lungo 4 cm è usato come antenna alla frequenza $f = 75MHz$. Il filo è fatto di rame ed ha un raggio $a = 0.4mm$. Sapendo che la resistenza di dissipazione di un filo circolare di lunghezza l è data

$$R_d = \frac{l}{2\pi a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}}$$

Si calcoli la resistenza di radiazione e l'efficienza dell'antenna.

Soluzione:

$$f = 75MHz = 75 \times 10^6 Hz$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{75 \times 10^6} = 4m$$

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{4cm}{4m} = 10^{-2}m \quad \text{per cui si tratta di un dipolo corto}$$

$$R_{irr} = \frac{2}{3} \eta \pi \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{3} 120\pi \pi \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 (10^{-2})^2 = 0.079\Omega$$

Per il rame $\mu_c \simeq \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$, $\sigma_c = 5.8 \times 10^7 S/m$

$$R_d = \frac{4 \times 10^{-2}m}{2\pi \times 4 \times 10^{-4}m} \sqrt{\frac{\pi \times 75 \times 10^6 Hz \times 4\pi \times 10^{-7} H/m}{5.8 \times 10^7 S/m}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 \times 10^{-2}} \sqrt{\frac{4\pi^2 \times 7.5 sec^{-1} \cdot \Omega sec}{5.8 \times 10^7 S}} = 10^2 \times 3.6 \times 10^{-4} \Omega = 0.036\Omega$$

L'efficienza si ottiene da

$$\delta = \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_d} = \frac{0.079}{0.079 + 0.036} = 0.687 \simeq 0.69$$

Esercizio n.2

L'intensità di radiazione di un'antenna si può rappresentare nel seguente modo:

$$I_r = B \cos \theta = I_r^{max} \cos \theta$$

dove I_r^{max} è il max dell'intensità di radiazione e l'intensità di radiazione è non nulla solo nell'emisfero superiore $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Si trovi la direttività D utilizzando la formula approssimata e con la formula esatta.

Soluzione

$$i_r = \frac{I_r^{max} \cos \theta}{I_r^{max}} = \cos \theta$$

$$i_r = 1 \quad \text{per} \quad \theta = 0, \quad i_r = 1/2 \quad \text{per} \quad \theta = 60^\circ \quad \text{da cui si ha HPBW} = 120^\circ$$

quindi $\theta_{1r} = \frac{2}{3}\pi$.

Poichè il diagramma di radiazione non dipende dalla coordinata φ , cioè è simmetrico rispetto all'asse z si ha $\theta_{2r} = \frac{2}{3}\pi$. Applicando la formula approssimata:

$$D \simeq \frac{4\pi}{\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{2}{3}\pi} = \frac{9}{\pi} = 2.86$$

Si trovi adesso D con la formula esatta:

$$\begin{aligned} D &= \frac{W_0}{W_a} \\ W_a &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_r^{max} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi I_r^{max} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi I_r^{max} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = 2\pi I_r^{max} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2\pi I_r^{max} \frac{1}{2} [1 - 0] = \pi I_r^{max} \end{aligned}$$

$$D = \frac{4\pi I_r^{max}}{\pi I_r^{max}} = 4$$

Si noti che tra $D = 4$ e $D = 2.86$ la discrepanza è piuttosto notevole. Esercizio n. 3
L'area efficace di una antenna è 9 m^2 . Quale è la sua direttività a 3 GHz ?

Soluzione

$$A_e = \frac{\lambda^2 D}{4\pi}$$

$$D = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2}$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/sec}}{3 \times 10^9 \text{ sec}^{-1}} = 10^{-1} \text{ m}$$

$$D = \frac{4\pi \times 9 \text{ m}^2}{10^{-2} \text{ m}^2} = 4\pi \times 90 = 11309 \quad D = 40,5 \text{ dB}$$

Decibel

In molti problemi interessa il rapporto tra due potenze P_1 e $P_2 \cdot \frac{P_1}{P_2}$ può variare su diversi ordini di grandezza; la scala decibel (dB) è una scala logaritmica se

$$G = \frac{P_1}{P_2} \quad \text{si ha} \quad G[\text{dB}] = 10 \log_{10} G = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

G	G[dB]
4	6 dB
2	3 dB
1	0 dB
0.5	- 3 dB
0.25	-6dB
0.1	-10 dB
10	10 . dB

$P_1 = \frac{V_1^2}{R}$ potenza dissipata da un resistore R con una d.d. p . V_1 in un tempo t_1 ;
 $P_2 = \frac{V_2^2}{R}$ d. d. p . V_2 in un tempo t_2

$$G[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 10 \log_{10} \frac{\frac{V_1^2}{R}}{\frac{V_2^2}{R}} = 10 \log_{10} \frac{V_1^2}{V_2^2} = 20 \log_{10} \frac{V_1}{V_2} = 20 \log(g) = g[\text{dB}]$$

$g = \frac{V_1}{V_2}$ rapporto tra tensioni; per i rapporti tra tensioni o correnti il fattore di scala è 20 anziché 10 Esercizio n. 4

Se la massima densità di potenza irradiata da un dipolo $\frac{\lambda}{2}$ è $S_{max} = 50 \mu W/m^2$ ad una distanza di $1 km$, quale è il valore della corrente I_o ?

Soluzione

$$\begin{aligned}
 I_{(z)} &= I_0 \cos t_2 & -\frac{\lambda}{4} \leq \leq \frac{\lambda}{4} \\
 S(r, \theta) &= \frac{15I_0^2}{\pi r^2} \left[\frac{\cos^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \theta \right]}{\sin^2 \theta} \right] = \frac{|E|^2}{2\eta_0} \\
 S_{max} &\text{ per } \theta = \frac{\pi}{2} \\
 S_{max} &= \frac{15I_0^2}{\pi r^2} \\
 I_0^2 &= \frac{\pi r^2}{15} \cdot S_{max} = \frac{\pi \cdot 10^{10}}{15} \cdot 50 \times 10^{-6} = 10.5[A^2] \\
 I_0 &= 3.24[A]
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 5

Un collegamento a microonde a $3GHz$ consiste di due antenne identiche, ciascuna con un guadagno di $30dB$. Se la potenza di uscita del trasmettitore è $1KW$ e le due antenne sono ad una distanza di $10Km$, si trovi la potenza ricevuta.

Soluzione

Supponiamo per semplicità $A_s = 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{P_R}{P_T} &= G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \\
 P_R &= P_T G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \\
 \lambda &= \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 m/sec}{\times 10^9 m/sec} = 10^{-1} m \\
 G_T[dB] &= G_R[dB] = 30dB \\
 \frac{G[dB]}{10} &= \log_{10} G \\
 G_T = G_R &= 10^{30/10} = 10^3
 \end{aligned}$$

$$P_R = 10^3 W \cdot 10^3 \cdot 10^3 \left(\frac{10^{-1}}{4\pi 10^4} \right)^2 = 10^3 W \cdot 10^6 \frac{10^{-2}}{(4\pi)^2 10^8} = \frac{10^{-1}}{(4\pi)^2} = 6,33 \times 10^{-4}$$

Esercizio n. 6

L'area effice di un'antenna parabolica è approx. uguale alla sua apertura fisica. Se la direttività di un'antenna parabolica è $30dB$ a $10GHz$, qual'è la sua area efficace? Se la frequenza dell'antenna fosse $30GHz$ quale sarà la sua nuova direttività?

Soluzione

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2 D}{4\pi} \quad A_{eff} = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$f_1 = 10GHz \quad \lambda_1 = \frac{3 \times 10^8 m/sec}{10^{10} sec/m} = 3 \times 10^{-2} m$$

$$A_{eff} = \frac{(3 \times 10^{-2})^2 \cdot 10^3}{4\pi} = \frac{9 \times 10^{-1}}{4\pi} = 0,07 m^2$$

$$f_2 = 30GHz \quad \lambda_2 = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^{10}} = 10^{-2} m$$

A_{eff} cost quindi

$$D = \frac{4\pi \cdot A_{eff}}{\lambda^2} = \frac{4\pi \cdot 0,07}{10^{-4}} = 9 \times 10^3$$

$$D[dB] = 10 \log_{10} D = 10 \times 3,954 = 39,54 dB$$

Esercizio n. 7

Determinare il guadagno e il diametro di un'antenna parabolica necessari ad un radar a $3GHz$ che disponendo di una potenza di $100KW$ e di una sensibilità di $-100dBm$ deve vedere un bersaglio caratterizzato da una sezione radar di $1m^2$ a $100km$ di distanza

Soluzione

$$f = 3GHz = 3 \times 10^9 Hz \quad \lambda = 10^{-1} m$$

$$P_T = 100KW$$

$$P_R = -100dBm = 10^{-10} nW = 10^{-13} W$$

$$\sigma = 1m^2$$

$$R = 100km = 10^5 m$$

$$\begin{aligned}
P_R &= \frac{\lambda^2 G_T^2}{(4\pi)^3 R^4} P_T \sigma \\
G_T &= \sqrt{\frac{(4\pi)^3 R^4}{\lambda^2 \sigma} \frac{P_R}{P_T}} \\
G_T &= 4455 = 36,5dB \quad \text{se } \delta = 1 \\
\frac{A_{eff}}{D} &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad \frac{A_{eff}}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad A_{eff} = 3,54m^2 \\
d^2 &= \frac{4A_{eff}}{\pi} \quad d = 2\sqrt{\frac{A_{eff}}{\pi}} = 2.12
\end{aligned}$$

Esercizio n. 8

Un sistema di trasmissione TV via satellite a $6GHz$ trasmette $100W$ attraverso un'antenna parabolica con diametro $2m$ ad una distanza dalla terra $= 40,000Km$; ogni canale occupa una banda di $5GHz$. Per un ricevitore con $T_{sys} = 580K$ quale è il minimo diametro dell'antenna parabolica per avere $SNR = 40dB$?

Soluzione

$$P_T = 100W \quad f = 6GHz = 6 \times 10^9 Hz$$

$$SNR = 10^4 = \frac{P_R}{N}$$

diametro antenna trasmittente $d_T = 2m$ $T_{sys} = 580K$

$$R = 40.000Km = 4 \times 10^7 m$$

$$\begin{aligned}
B &= 5MHz = 5 \times 10^6 Hz \\
\lambda &= \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^9} = 0.5 \times 10^{-1} = 5 \times 10^{-2} m \\
A_T &= \frac{\pi d_T^2}{4} = \frac{\pi 4}{\pi} = \pi (m^2) \\
N &= KT_{sys}B = 1.38 \times 10^{-23} \times 580 \times 5 \times 10^6 = 4 \times 10^{-14} W \\
P_R &= \frac{P_T A_T A_R}{\lambda^2 R^2} = \frac{100 \pi A_R}{(5 \times 10^{-2})^2 (4 \times 10^7)^2} = 7.85 \times 10^{-11} A_R \\
\frac{P_R}{N} &= \frac{7,85 \times 10^{-11} A_R}{4 \times 10^{-14}}
\end{aligned}$$

$$A_R = 5.1m^2$$

$$d_R = \sqrt{4A_r/\pi} = 2.55m$$

Usiamo la formula di Friis S per un'antenna senza perdite

$$P_R = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right) G_R G_T G_T$$

Supponiamo di avere delle antenne senza perdite

$$(S_T = S_a = 1), G = d$$

$$\frac{A_{eff}}{d} = \frac{\lambda^2}{4\pi} d = A_{eff} \frac{4\pi}{\lambda^2}$$

$$P_R = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right) A_{eff}^R \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot A_{eff} \frac{4\pi}{\lambda^2} P_T = \frac{A_{eff}^R A_{eff}^T}{r^2 \lambda^2} P_T$$

Esercizio n.9

Consideriamo $\lambda = 4m$, dipolo $d = 2m$, $f = 75MHz$, $P_{rad} = 73\Omega$, $R_{loss} = 1.8\Omega$

Soluzione

$$\delta = \frac{R_{rad}}{R_{rad} + R_{loss}} = 98\%$$