Alcuni Strumenti

$X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z$ sono una catena di Markov

allora

$$I(X;Y) \geq I(X;Z)$$

disug. della elab dei dati

data processing inequality

(Vale anche $I(Z;Y) \geq I(Z;X)$)

— o —

Chain Rules

- $H(X;Y) = H(X) + H(Y|X)$
- $H(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \dots, X_1) \quad \left(\leq \sum_{i=1}^{n} H(X_i) \right)$
- $I(X,Y;Z) = I(X;Z) + I(Y;Z|X)$
- $I(X_1, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y | X_{i-1}, \dots, X_1)$

— o —

X R.V. Voglio stimare X sulla base di una variabile Y (possib. non indip da X)

$X \rightarrow Y \rightarrow \hat{X}$ Sia $P_e = P_r\{X \neq \hat{X}\}$

allora

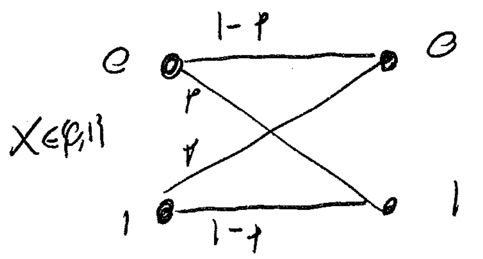
$$h(P_e) + P_e(\log|\mathcal{X}|-1) \geq H(X|\hat{X}) \geq H(X|Y)$$

che implica che $\forall$ stimatore

$$H(X|Y) \leq h(P_e) + P_e \log|\mathcal{X}| \leq 1 + P_e \log|\mathcal{X}|$$

Canali Utili

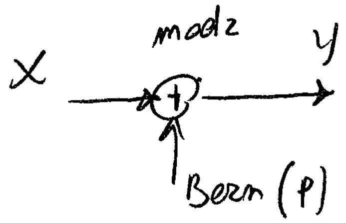
Binary Symmetric Channel (BSC)

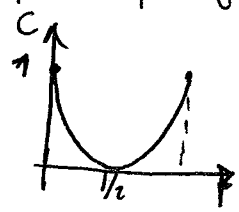


$$C_{BSC} = 1 - h(p)$$

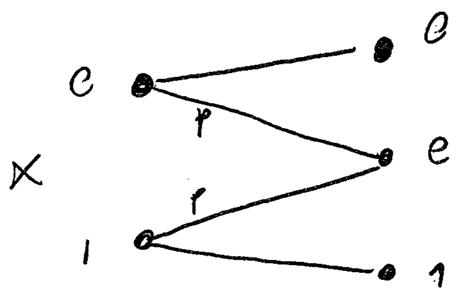
con $P\{X=1\} = P\{X=0\} = \frac{1}{2}$

$$h(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$$



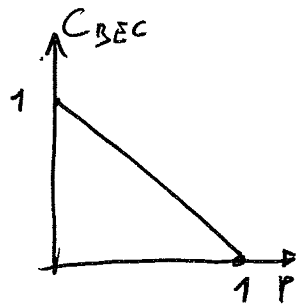


Binary Erasure Channel (BEC)

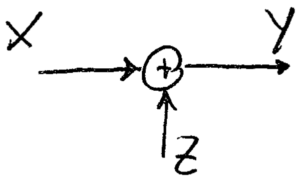


$$C_{BEC} = 1 - p$$

con $P\{X=1\} = P\{X=0\} = \frac{1}{2}$



AWGN Channel



$$Z \sim \mathcal{N}(0, N)$$

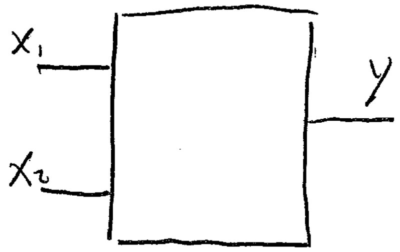
Vincolo di Potenza

$$\boxed{E\{X^2\} \leq P}$$

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

con $X \sim \mathcal{N}(0, P)$

Il canale ad accesso multiplo



$p(y|x_1, x_2)$ definisce il canale

Per ora assumiamo un DM-MAC

- X_1 e X_2 sono INDIPENDENTI

Per effettuare una trasmissione affidabile si utilizza un codice per canale ad accesso multiplo che consiste in 2 codici uno per ingresso:

$$\underline{X}_1 : \{1, \dots, 2^{nR_1}\} \longmapsto x_1^n \qquad w_1 \to X_1(w_1)$$

$$\underline{X}_2 : \{1, \dots, 2^{nR_2}\} \longmapsto x_2^n \qquad w_2 \to X_2(w_2)$$

Si indica come codice $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$

caratterizzato dai TASSI (R_1, R_2)

Ad esso è associata una legge di decodifica

$$g : \mathcal{Y}^n \to (\{1, \dots, 2^{nR_1}\}, \{1, \dots, 2^{nR_2}\})$$

$$g(\underline{y}) = (\hat{w}_1, \hat{w}_2)$$

Varie opzioni: MAP, ML, TIPICITÀ CONGIUNTA...

Prob. di errore media aritmetica: $P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{(w_1, w_2)} P_r\{g(Y^n) \neq (w_1, w_2)|$

Prob. di errore (media aritmetica):

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{nR_1} 2^{nR_2}} \sum_{(w_1,w_2)} P_r \{ g(Y) \neq (w_1,w_2) \mid W_1 = w_1, W_2 = w_2 \}$$

Una coppia di Tassi (R_1, R_2) si dice <u>raggiungibile</u> se $\exists$ una sequenza di codici $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ con

$$\lim_{n \to \infty} P_e^{(n)} = 0$$

- La regione di capacità per un MAC è la chiusura dell'insieme delle coppie di Tassi raggiungibili

Un MAC è definito dalla terna $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1,x_2), \mathcal{Y})$

Dato un MAC $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1,x_2), \mathcal{Y})$ e una pmf in ingresso $p(x_1)p(x_2)$ l'insieme di tutti gli (R_1, R_2) tali che

$$\begin{cases} R_1 \geq 0 \\ R_2 \geq 0 \\ R_1 \leq I(X_1; Y | X_2) \\ R_2 \leq I(X_2; Y | X_1) \\ R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y) \end{cases}$$

Si indica come regione dei Tassi associata a $p(x_1)p(x_2)$

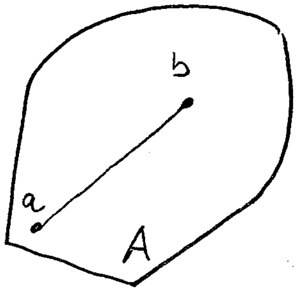
Th: Data un MAC $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1,x_2), \mathcal{Y})$ la regione di capacità C è data dalla seguente

$$C = CH\left(\bigcup_{p(x_1)p(x_2)} T_{p(x_1)p(x_2)}\right)$$

dove $CH(\cdot)$ denota l'inviluppo convesso e $T_{p(x_1)p(x_2)}$ è la regione dei tassi associata alla pmf in ingresso $p(x_1)p(x_2)$

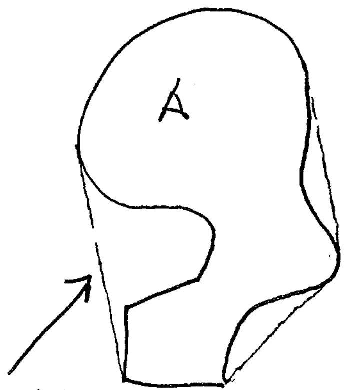
Inviluppo convesso:

$$CH(A) = \bigcap_{\substack{B \supseteq A \\ B \text{ convessa}}} B$$



$\lambda a + (1-\lambda) b \in A$

$a, b \in A \quad \lambda \in [0, 1]$



$CH(A)$

1) Per ogni $p(x_1)p(x_2)$ ottengo una regione (raggiungibile)

$$R_1 \leq I(X_1;Y|X_2)$$
$$R_2 \leq I(X_2;Y|X_1)$$
$$R_1+R_2 \leq I(X_1,X_2;Y)$$

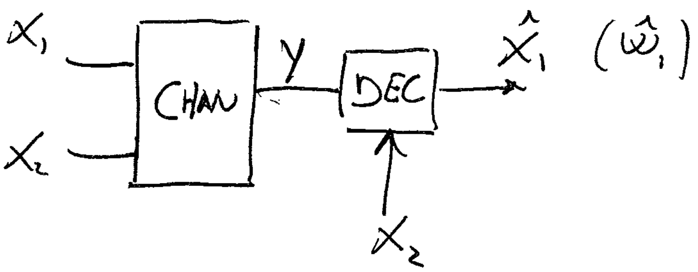
2) Le unisco tutte

3) Prendo (la chiusura) dell'inviluppo convesso.

$I(X_1;Y|X_2)$ è il massimo tasso trasferibile $X_1 \to Y$ noto X_2

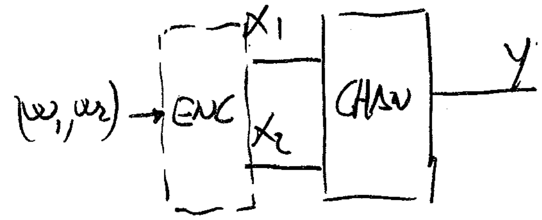
$I(X_2;Y|X_1)$ idem $X_1 \leftrightarrow X_2$

$I(X_1,X_2;Y)$ è il massimo tasso trasferibile dall'in all'out se uso insieme entrambi gli ingressi



$\Leftarrow I(X_1;Y|X_2)$

$I(X_1,X_2;Y) \Rightarrow$



Considerazione:

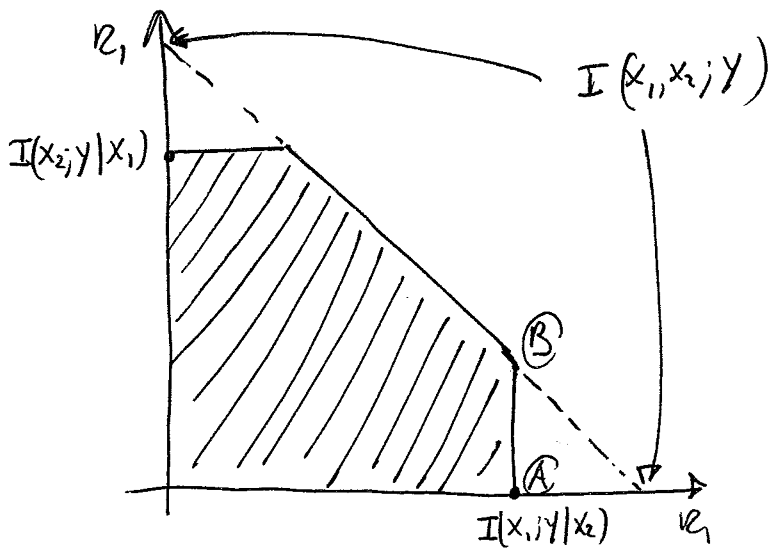
$$C \subseteq \begin{cases} R_1 \leq \max\limits_{p(x_1)p(x_2)} I(X_1;Y|X_2) \\ R_2 \leq \max\limits_{p(x_1)p(x_2)} I(X_2;Y|X_1) \\ R_1+R_2 \leq \max\limits_{p(x_1)p(x_2)} I(X_1,X_2;Y) \end{cases}$$

$R_1 \geq 0$
$R_2 \geq 0$

che ha la stessa forma di una regione di Tassi ma

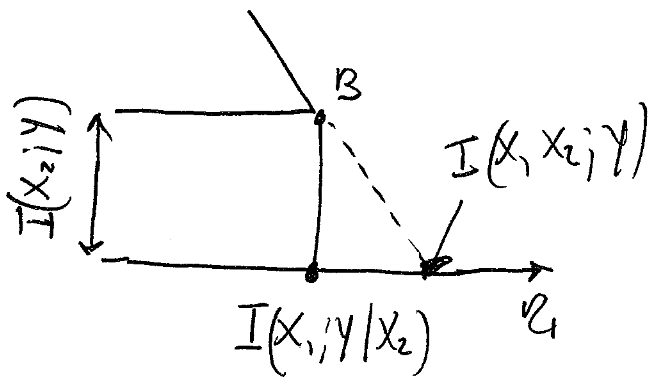
IN GENERALE NON É UNA REGIONE DI TASSI

Come è fatta una r.d.t. ?



Ottenere B:

$$I(X_1,X_2;Y) \overset{\text{chain rule}}{=} I(X_2;Y)+I(X_1;Y|X_2)$$



Codifica X_2 con tasso $R_2 = I(X_2;Y)$ (X_1 è un rumore)

il ricevitore recupera X_2 che a questo punto è noto

Codifica X_1 con tasso $R_1 = I(X_1;Y|X_2)$

il ricevitore, noto X_2, recupera X_1. → $\boxed{\text{ONION PEELING}}$

Ottenere A:

Codifica X_2 con un codice banale a $R_2=0$ generato secondo $p(x_2)$ $\qquad R_2=0 \to X_2$ non è casuale

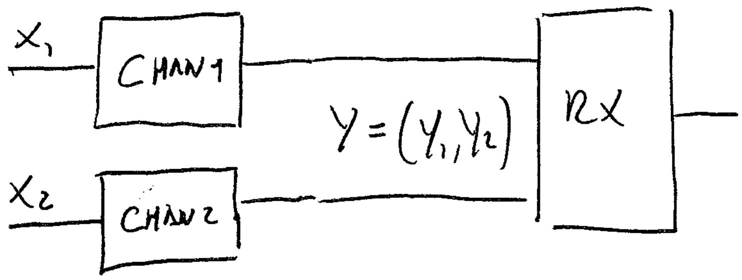
→ noto ...

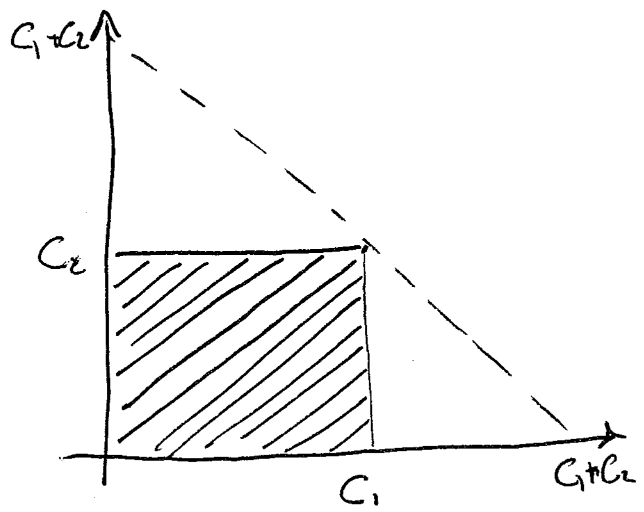
Gli altri vertici: nello stesso modo.

$(R_1,R_2)=\underline{0}$: BANALE

Esempi:

CANALI ORTOGONALI

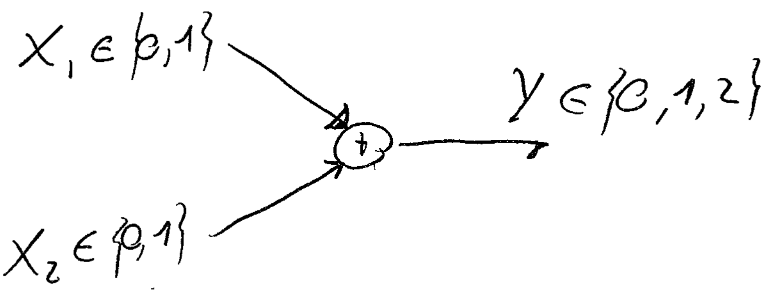




$$C_1 = \max_{p(x_1)} I(X_1; Y)$$

$$C_2 = \max_{p(x_2)} I(X_2; Y)$$

Canale ad accesso multiplo con cancellazione

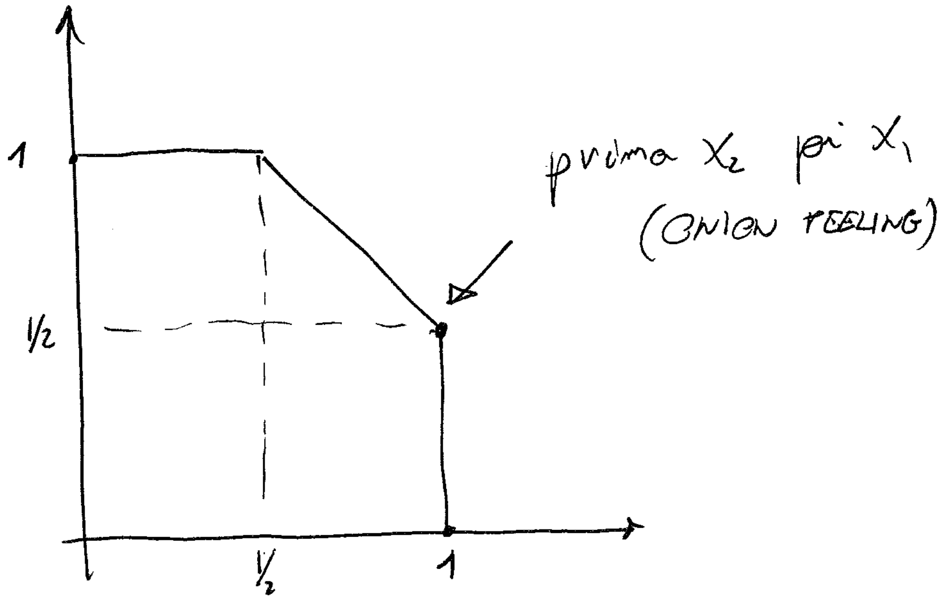


0 e 2 non sono ambigui ($X_1=0$ $X_2=0$ e $X_1=1$ e $X_2=1$)

ma 1 è ambigua

$I(X_1;Y|X_2) \le 1$

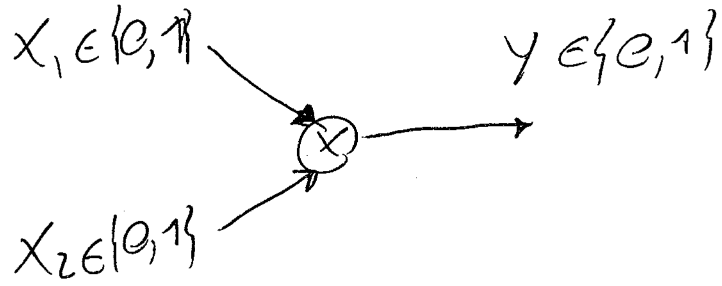
$$I(X_1;Y|X_2) = H(X_1|X_2) - H(X_1|X_2 Y) \le$$
$$\le H(X_1|X_2)$$
$$\le H(X_1)$$
$$\le \lg 2 = 1$$



X_1 trasmette direttamente

X_2 si vede il 50% dei bit cancellati $\rightarrow BEC(1/2) \rightarrow C=\frac{1}{2}$

Binary Multiplier Channel



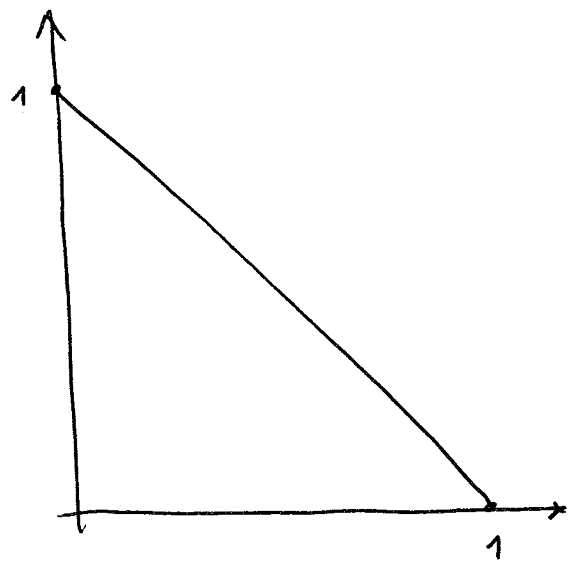
$I(X_1;Y|X_2) \leq 1$ $\qquad$ $\underbrace{P\{X_2=1\}=1 \text{ e } P\{X_1=1\}=\tfrac{1}{2}}$ $\to I(X_1;Y|X_2)=1$

$\to I(X_1,X_2;Y)=1$

$I(X_1,X_2;Y) \leq 1$

BINARIO

Lo stesso $p(x_1)\,p(x_2)$. da l'"="



Dimostrazione del Teorema

1) C è raggiungibile ($C \setminus \partial C$ è ragiungibile)

- Ogni regione dei Tassi ($\forall p(x_1) p(x_2)$)

$$\begin{cases} R_1 \geq 0 \\ R_2 \geq 0 \\ R_1 < I(X_1; Y | X_2) \\ R_2 < I(X_2; Y | X_1) \\ R_1 + R_2 < I(X_1, X_2; Y) \end{cases}$$

è ragiungibile

- Ogni (R_1, R_2) all'interno di una combinazione convessa di più regioni dei Tassi è raggiungibile

2) Se (R_1, R_2) è ragiungibile allora

$$(R_1, R_2) \in C$$

Th: C è convesso.

Dim:

la Tesi è equivalente a:

se (R_1, R_2) e (R_1', R_2') sono raggiungibili

allora $\forall \lambda \in [0,1]$ $(\lambda R_1 + (1-\lambda)R_1', \lambda R_2 + (1-\lambda)R_2')$

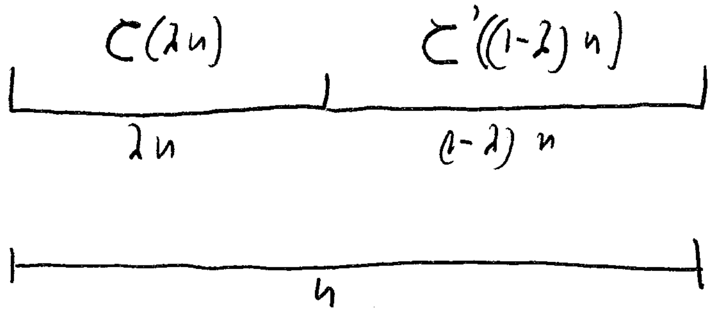
è raggiungibile.

(R_1, R_2) raggiungibile significa che $\exists$ una sequenza di

codici $C(n)$ $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ con $P_e^{(n)} \to 0$

(R_1', R_2') raggiungibile $\exists$ $C'(n)$ $P_e^{(n)} \to 0$

Dato $\lambda \in [0,1]$, costruisco un codice



$\to ((2^{n(\lambda R_1 + (1-\lambda)R_1')}, 2^{n(\lambda R_2 + (1-\lambda)R_2')}), n)$

$\blacksquare$

Th: Dato un MAC e una input pmf $p(x_1)p(x_2)$ la corrispondente regione dei Tassi

$$\begin{cases} R_1 \geq 0 \\ R_2 \geq 0 \\ R_1 < I(X_1;Y|X_2) \\ R_2 < I(X_2;Y|X_1) \\ R_1+R_2 < I(X_1,X_2;Y) \end{cases}$$

è raggiungibile.

Dim: RANDOM CODING

Codice 1 genera $\underline{x}_1(w_1) \in \mathcal{X}_1^n$ $w_1 = 1, \dots, 2^{nR_1}$

i.i.d. $\sim p(x_1)$

Codice 2 " $X_2(w_2) \in \mathcal{X}_2^n$ $w_2 = 1, \dots, 2^{nR_2}$

i.i.d. $\sim p(x_2)$

Trasmette $(w_1, w_2) \longrightarrow \underline{X}_1(w_1)$ $\underline{X}_2(w_2)$

Al ricevitore riceve $\underline{Y}$ (vettore lungo n)

dichiara $\hat{w}_1$ $\hat{w}_2$ se $(\underline{X}_1(\hat{w}_1), \underline{X}_2(\hat{w}_2), \underline{Y})$ sono congiuntamente Tipiche e $\nexists$ $(w_1', w_2') \neq (\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ per cui $(\underline{X}_1(w_1'), \underline{X}_2(w_2'), \underline{Y})$ siano congiuntamente Tipiche

Metodo: analizzo la $P_e^{(n)}$ e mostro che nella regione dei tassi $\to 0$

Data la simmetria della costruzione posso assumere di aver trasmesso $w_1 = 1$ e $w_2 = 1$

Def $E_{ij} = \{ (\underline{X}_1(i), \underline{X}_2(j), \underline{Y}) \in A_\varepsilon^{(n)} \}$

$$P_e^{(n)} = P_r \{ E_{11}^c \cup \bigcup_{(i,j) \neq (1,1)} E_{ij} \}$$

$$\leq P_r \{ E_{11}^c \} + \sum_{(i,j) \neq (1,1)} P_r \{ E_{ij} \}$$

$< \varepsilon$ poiché $P_r\{A_\varepsilon^{(n)}\} > 1 - \varepsilon$ $(\to 1)$

$$\sum_{(i,j) \neq (1,1)} P_r\{E_{ij}\} = \underbrace{\sum_{j>1} P_r\{E_{1j}\}}_{1} + \underbrace{\sum_{i>1} P_r\{E_{i1}\}}_{2} + \underbrace{\sum_{\substack{i>1 \\ j>1}} P_r\{E_{ij}\}}_{3}$$

1 $j \neq 1 \to \underline{X}_2(j)$ è <u>indip.</u> dall $\underline{X}_2(1)$ trasmessa

$(\underline{X}_1(1), \underline{X}_2(1), \underline{Y})$ $\quad p(x_1, x_2, y) = p(y / x_1, x_2)\, p(x_1)\, p(x_2)$

$(\underline{X}_1(1), \underline{X}_2(j), \underline{Y})$ $\quad p'(x_1, x_2, y) = p(x_1, y)\, p(x_2)$

$$\Pr\{E_{1j}\} = \sum_{(x_1, x_2, y) \in A_\varepsilon^{(n)}} p(x_1, y)\, p(x_2)$$

Qui sfrutto il discorso delle sequenze di sottoinsiemi ...

$$\leq \sum_{A_\varepsilon^{(n)}} 2^{-n(H(X_1,Y)-\varepsilon)}\, 2^{-n(H(X_2)-\varepsilon)}$$

$$= 2^{-n(H(X_1,Y) + H(X_2) - 2\varepsilon)} \sum_{A_\varepsilon^{(n)}} 1 \rightarrow |A_\varepsilon^{(n)}|$$

$$\leq 2^{-n(H(X_1,Y) + H(X_2) - 2\varepsilon)}\, 2^{n(H(X_1,X_2,Y) + \varepsilon)}$$

$$= 2^{-n(I(X_2;Y|X_1) - 3\varepsilon)}$$

$$\Big(H(X_1,Y) + H(X_2) - H(X_1,Y,X_2) = H(X_2) - H(X_2|X_1,Y) = I(X_2;X_1 Y)$$
$$\overset{c.r.}{=} \underbrace{I(X_2;X_1)}_{\substack{\| \\ 0 \text{ indip.}}} + I(X_2;Y|X_1) \Big)$$

② $\Pr\{E_{i1}\} \leq 2^{-n(I(X_1;Y|X_2) - 3\varepsilon)}$

③ $\Pr\{E_{ij}\} \leq 2^{-n(I(X_1,X_2;Y) - 4\varepsilon)}$

$$P_e^{(n)} \leq \underbrace{\varepsilon}_{\Pr\{E_{11}^c\}} + 2^{nR_2}\, \underbrace{2^{-n(I(X_2;Y|X_1)-3\varepsilon)}}_{①} + 2^{nR_1}\, \underbrace{2^{-n(I(X_1;Y|X_2)-3\varepsilon)}}_{②}$$

$$+ 2^{n(R_1+R_2)}\, \underbrace{2^{-n(I(X_1X_2;Y)-4\varepsilon)}}_{③}$$

$$\forall (R_1, R_2) \quad \Big| \quad \begin{aligned} R_1 &< I(X_1, Y \mid X_2) \\ R_2 &< I(X_2 Y \mid X_1) \\ R_1 + R_2 &< I(X_1 X_2 ; Y) \end{aligned}$$

si fissa ε suff. piccolo e con n suff. grande

$$P_e^{(n)} < 2\varepsilon \qquad \blacksquare$$

Per dimostrare la raggiungibilità di C occorre estendere il prec. Teorema a <u>tutte le combinazioni convesse delle regioni dei tassi</u>.

Per formalizzare si introduce Q r.v. che consente di esprimere la combinazione

Th: L'insieme di tutti i tassi (R_1, R_2) tali che

$$\begin{aligned} R_1 &< I(X_1 ; Y \mid X_2, Q) \\ R_2 &< I(X_2 ; Y \mid X_1, Q) \\ R_1 + R_2 &< I(X_1 X_2 ; Y \mid Q) \end{aligned}$$

$\forall \; p(x_1 | q) \, p(x_2 | q) \, p(q)$ è RAGGIUNGIBILE

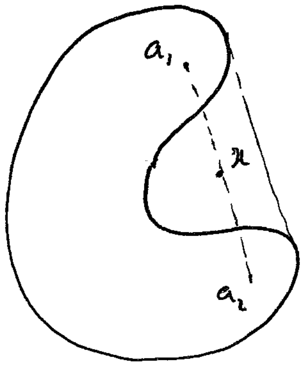
- $I(X;Y|Q) = \sum_q p(q)\, I(X;Y|Q=q)$ $\qquad |Q|=2 \rightarrow (\lambda, 1-\lambda)$

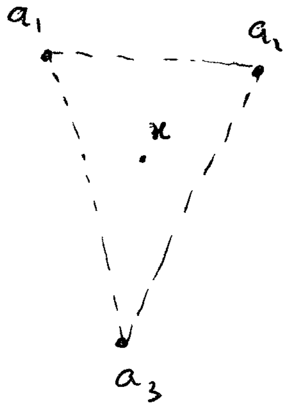
- $|Q| = 4$ è sufficiente (Caratheodory 1911)

$\forall x \in CH(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^d$

$\exists\, \underline{a} \in A^{d+1},\ \underline{p} \in \mathbb{R}_+^{d+1} \quad \sum p_i = 1$

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} a_i p_i$$





Parte inversa.

Th: $\forall (R_1, R_2)$ raggiungibili $(R_1, R_2) \in C$

ovvero data una sequenza di codici

$((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ con $P_e^{(n)} \to 0$

$\exists \; p(x_1|q)\, p(x_2|q)\, p(q)$ tale che

$$\begin{cases} R_1 \leq I(X_1; Y | X_2, Q) \\ R_2 \leq I(X_2; Y | X_1, Q) \\ R_1 + R_2 \leq I(X_1, X_2; Y | Q) \end{cases}$$

Dim:

Sia dato un codice $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ con $P_e^{(n)} \to 0$

Supponiamo di trasmettere w_1 e w_2 unif. distrib. in $\{1, \dots, 2^{nR_1}\}$ e $\{1, \dots, 2^{nR_2}\}$, rispettivamente. (e indip)

$H(w_1) = \log 2^{nR_1} = nR_1$

$H(w_2) = nR_2$

$H(w_1, w_2) = n(R_1 + R_2)$

Si utilizzerà Fano:

$$H(W_1,W_2|Y) \leq n(R_1+R_2)P_e^{(n)}+1 = n\underbrace{\left((R_1+R_2)P_e^{(n)}+\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}^{\varepsilon_n}$$

$$H(W_1|Y) \leq H(W_1,W_2|Y) \leq n\varepsilon_n$$

$$H(W_2|Y) \leq H(W_1,W_2|Y) \leq n\varepsilon_n$$

QUALUNQUE REGOLA DI DECODIFICA

$$nR_1 = H(W_1) = I(W_1;\underline{Y}) + H(W_1|\underline{Y})$$

$$\overset{\text{Fano}}{\leq} I(W_1;\underline{Y}) + n\varepsilon_n$$

$$W_1 \to \underline{X}_1 \to \underline{Y}$$

$$\overset{\text{D.P.I.}}{\leq} I(\underline{X}_1;\underline{Y}) + n\varepsilon_n$$

$$= H(\underline{X}_1) - H(\underline{X}_1|\underline{Y}) + n\varepsilon_n$$

$$= H(\underline{X}_1|\underline{X}_2) - H(\underline{X}_1|\underline{Y}) + n\varepsilon_n$$

$$\leq H(\underline{X}_1|\underline{X}_2) - H(\underline{X}_1|\underline{Y}\,\underline{X}_2) + n\varepsilon_n$$

$$= I(\underline{X}_1;\underline{Y}|\underline{X}_2) + n\varepsilon_n$$

$$= H(\underline{Y}|\underline{X}_2) - H(\underline{Y}|\underline{X}_1,\underline{X}_2) + n\varepsilon_n$$

$$= H(\underline{Y}|\underline{X}_2) - \sum H(Y_i|Y_1,\dots,Y_{i-1},\underline{X}_1,\underline{X}_2) + n\varepsilon_n$$

$$\overset{\text{MA-DMC}}{=} H(\underline{Y}|\underline{X}_2) - \sum H(Y_i|X_{1i},X_{2i}) + n\varepsilon_n$$

$$\leq \sum_n H(Y_i|X_{2i}) - H(Y_i|X_{1i},X_{2i}) + n\varepsilon_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} I(Y_i;X_{1i}|X_{2i}) + n\varepsilon_n$$

Analogamente

$$\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} R_2 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Y_i ; X_{2i} | X_{1i}) + \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\varepsilon_n$$

e

$$\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} (R_1 + R_2) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i} X_{2i} ; Y_i) + \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\varepsilon_n$$

al variare di i X_{1i} X_{2i} e Y_i avremo distribuzioni che cambiano indotte dalle parole di codice se introduciamo Q unif distr. su $\{1, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} I(X_{1i} ; Y_i | X_{2i}) = \sum_{q=1}^{n} p(q)\, I(X_{1i} ; Y_i | X_{2i}, Q = q)$$

dove $p(q) = \frac{1}{n}$ e $X_{1i} \sim p(x_1|q)$ $X_{2i} \sim p(x_2|q)$

indotte dal codice

ne consegue che $\forall n$

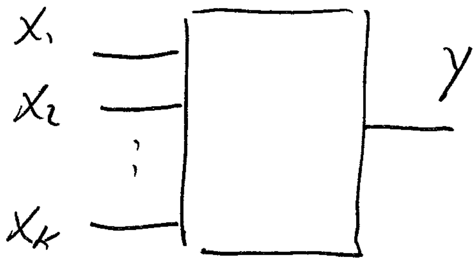
$$R_1 \le I(X_1 ; Y | X_2, Q) + \varepsilon_n$$

$$R_2 \le I(X_2 ; Y | X_1, Q) + \varepsilon_n$$

$$R_1 + R_2 \le I(X_1, X_2 ; Y | Q)$$

$\boxtimes$

MAC con ~~k~~ ingressi



$$C = CH\left(\bigcup_{p(x_1)\cdots p(x_k)} T \right)$$

T:

$$R_i \geq 0 \qquad i=1,\dots,k$$

$$R_i \leq I(X_i;Y \mid X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_k) \qquad i=1,\dots,k$$

$$R_i+R_j \leq I(X_i X_j;Y \mid \{X_1,\dots,X_k\}\setminus\{X_i,X_j\})$$

$$\vdots$$

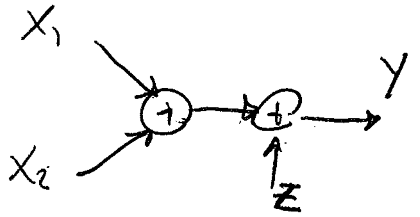
$$R_1+\dots+R_k \leq I(X_1,\dots,X_k;Y)$$

MAC Gaussiano

$$Y = X_1 + X_2 + Z \qquad Z \sim \mathcal{N}(0, N)$$

Vincoli $E\{X_1^2\} \leq P_1$ $\quad (*)$

$E\{X_2^2\} \leq P_2$



$$\begin{cases} R_1 \leq I(X_1; Y \mid X_2) \\ R_2 \leq I(X_2; Y \mid X_1) \\ R_1 + R_2 \leq I(X_1\, X_2; Y) \end{cases}$$

Regione dei Tassi (Tutti raggiungibili)

C è l'inviluppo convesso dell'unione di tutte le regioni al variare di $p(x_1)p(x_2)$ con $(*)$

$$I(X_1;Y|X_2) = h(Y|X_2) - h(Y|X_1 X_2)$$

$h(Z) = \frac{1}{2}\log 2\pi e N$

$$= h(Y|X_2) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N$$

$$= h(Y - X_2|X_2) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N$$

$Y = X_1 + X_2 + Z$

$Y - X_2 = X_1 + Z$ indip da X_2

$$= h(X_1 + Z) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N$$

$$\leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P_1 + N) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P_1}{N}\right)$$

Se pongo $X_1 \sim N(0, P_1)$ massimizza $I(X_1;Y|X_2)$

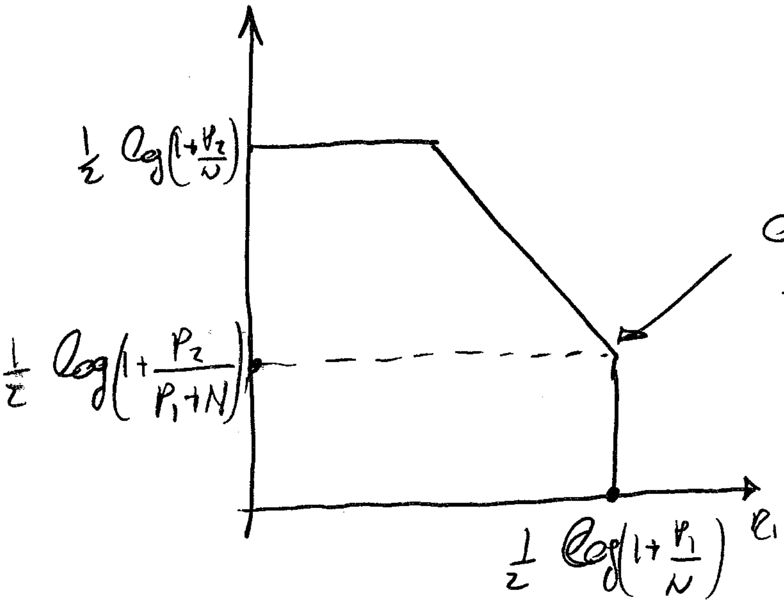
" " $X_2 \sim N(0, P_2)$ " $I(X_2;Y|X_1)$

Se contemporaneamente $X_1 \sim N(0, P_1)$ e $X_2 \sim N(0, P_2)$

$X_1 + X_2 \sim N(0, P_1 + P_2)$ e $I(X_1 X_2;Y)$ è max!

Ho $p(x_1)\,p(x_2)$ che massimizza tutti e 3 i vincoli:

C!



ONION PEELING
prima X_2, poi, noto X_2
ottengo X_1

$$\begin{cases} R_1 \leq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_1}{N}\right) \\ R_2 \leq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_2}{N}\right) \\ R_1+R_2 \leq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_1+P_2}{N}\right) \end{cases}$$

TUTTI GLI ALTRI PUNTI : TIME SHARING : CDMA

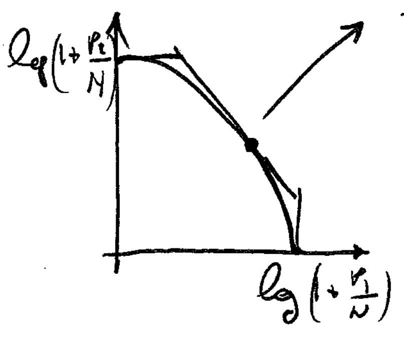
$\frac{1}{2}$ x il banda base

FDMA:

$$R_1 \leq W_1 \log\left(1+\frac{P_1}{NW_1}\right)$$

$$R_2 \leq W_2 \log\left(1+\frac{P_2}{NW_2}\right)$$

I canali sono multip—



$$\frac{P_1}{W_1} = \frac{P_2}{W_2}$$

TDMA:

Calibrando le potenze medie si ottiene la stessa regione del FDMA!

Ex: DIMOSTRARE LA PRECEDENTE AFFERMAZIONE

MAC GAUSSIANO CON m UTENTI

Analogamente

$$R_i \leq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_i}{N}\right)$$

$$\vdots$$

$$\sum R_i \leq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sum P_i}{N}\right) \qquad **$$

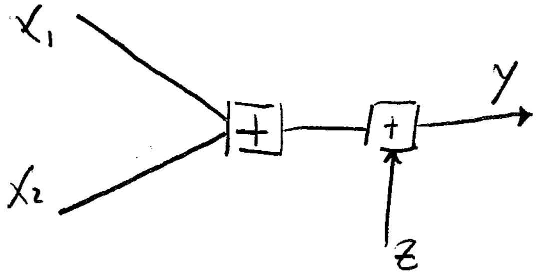
$** \wedge R_i = R$ (Tutti le stesse rate)

$$m R \leq \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{mP}{N}\right)$$

THROUGHPUT COMPLESSIVO $\to \infty$ $m \to \infty$

$$R \leq \frac{1}{m}\,\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{mP}{N}\right) \to 0 \quad m \to \infty \,!$$

Ex.



$\mathcal{X}_1 = \{0, 1\}$

$\mathcal{X}_2 = \{0, 1\}$

$\mathcal{Z} = \{0, 1\}$

$P\{Z = 1\} = p$

$\boxed{+}$ $\equiv$ somma modulo 2

Si individui la regione di capacità C ....

e si commentino le $p(x_1)p(x_2)$ relative al bordo di C