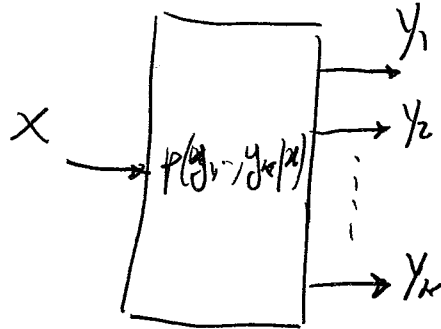


Canali Broadcast

(66)

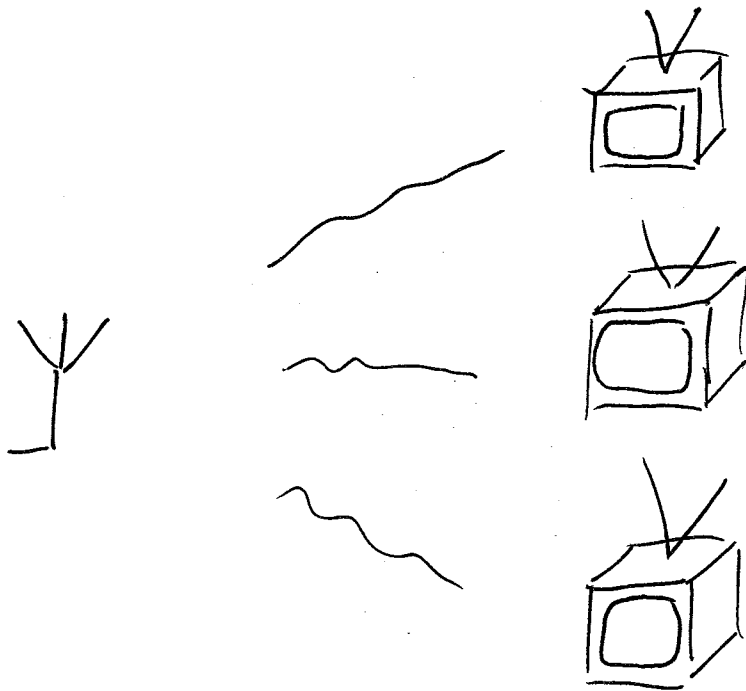
comunicazione $1 \rightarrow$ molti



$(x, P(y_1, \dots, y_k/x), y_1, \dots, y_k)$ definiscono il canale

ESEMPIO:

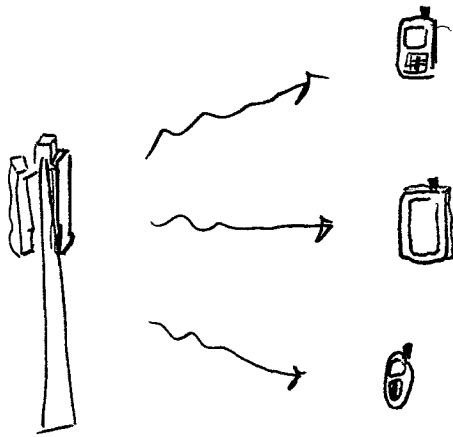
Televisione / Radio



Stesse contenuti a tutti.

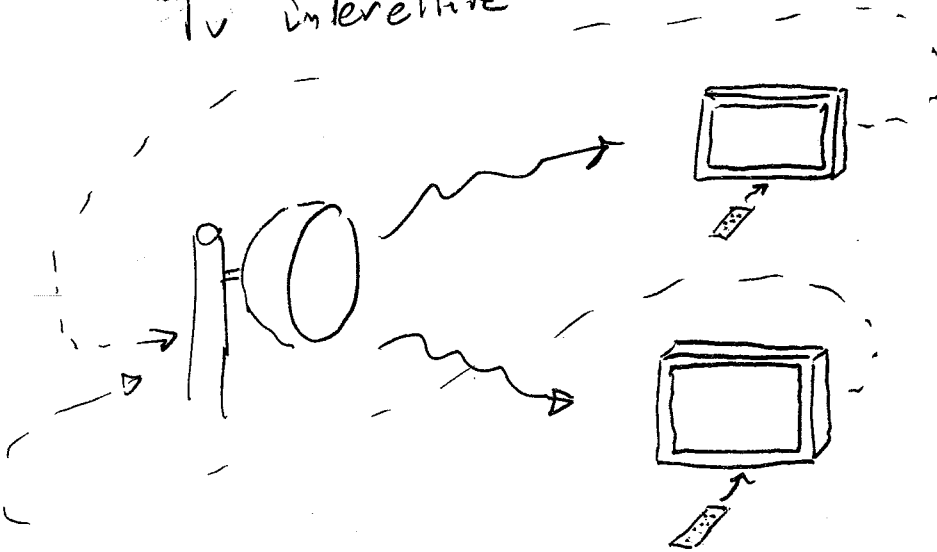
Base Station

(67)



Contenuti praticamente indipendenti

Tv interattive



Parziale/significativa sovrapposizione dei contenuti

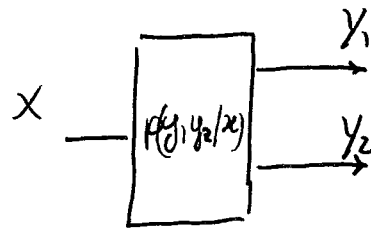
Esempio: Lezione in una aula

Differenti studenti con differenti attitudini e preparazione

CATTIVA LEZIONE: TUTTI APPRENDONO IN BASE ALLA MINIMA CAPACITÀ DI APPRENDIMENTO FRA GLI STUD.

BUONA LEZIONE: STESSO CONTENUTO MA CIASCUNO APPRENDE SECONDO LE SUE CAPACITÀ

Ci concentriamo su un DM-BC a 2 UERMT



Memoryless:

$$p(y_1, y_2 | \underline{x}) = \prod_{i=1}^n p(y_{1i}, y_{2i} | x_i)$$

(NO FEEDBACK)

Come otteniamo TX affidabile?
con un codice!

Un codice $(2^{nR_1}, 2^{nR_2}, n)$ per canale broadcast
consiste in una funzione di codifica

$$\underline{x}: \{1, \dots, 2^{nR_1}\} \times \{1, \dots, 2^{nR_2}\} \rightarrow \mathcal{X}^n \quad (w_1, w_2) \rightarrow \underline{x}(w_1, w_2)$$

a cui corrispondono 2 funzioni di decodifica

$$g_1: y_1^n \rightarrow \{1, \dots, 2^{nR_1}\} \quad g_1(y_1) \rightarrow \hat{w}_1$$

$$g_2: y_2^n \rightarrow \{1, \dots, 2^{nR_2}\} \quad g_2(y_2) \rightarrow \hat{w}_2$$

Anche in questo caso

(69)

$$P_c^{(n)} = P_v \left\{ g(Y_1) \neq w_1, \vee g(Y_2) \neq w_2 \right\}$$

com. $w_1, w_2 \sim \text{unif. } \{1, \dots, 2^{nR_1}\} \times \{1, \dots, 2^{nR_2}\}$

$$P_c^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{w_1} \sum_{w_2} P_v \left(g(Y_1) \neq w_1, \vee g(Y_2) \neq w_2 \mid W_1=w_1, W_2=w_2 \right)$$

Con questa def. possiamo mandare messaggi indip. a Y_1 e Y_2

Se sono interessata ad un messaggio comune def. i codici

$$\left(\left(2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2} \right), n \right) \quad \text{Dove}$$

R_0 è il tasso dell'informazione comune

R_1 è " " " " " " di prima utente (Y_1)

R_2 " " " " " " di seconda " (Y_2)

Codifica

$$X: \{1, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, \dots, 2^{nR_1}\} \times \{1, \dots, 2^{nR_2}\} \rightarrow \mathcal{X}^n \quad (w_0, w_1, w_2) \rightarrow X(w_0, w_1, w_2)$$

$$g_1: Y_1^n \rightarrow \{1, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, \dots, 2^{nR_1}\} \quad g_1(y_1) \rightarrow (\hat{w}_0, \hat{w}_1)$$

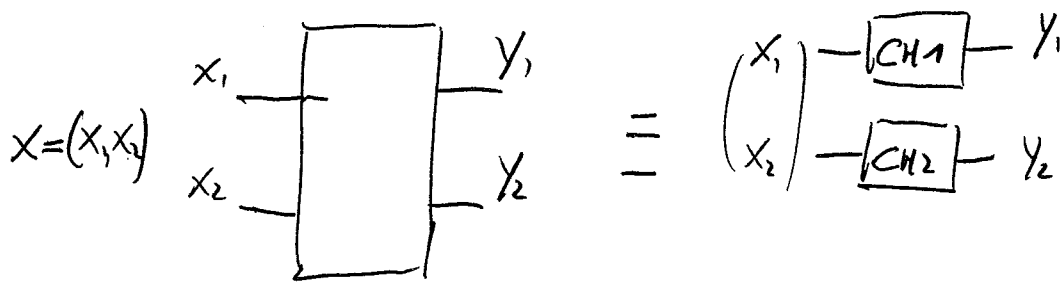
$$g_2: Y_2^n \rightarrow \{1, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, \dots, 2^{nR_2}\} \quad g_2(y_2) \rightarrow (\hat{w}_0, \hat{w}_2)$$

- Una coppia (o una terna) di Torni (R_1, R_2) si dice raggiungibile 70
 se \exists una sequenza di codici $(z^{(n)}, z^{(n)}, n)$ con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{P(z^{(n)})} = 0$$

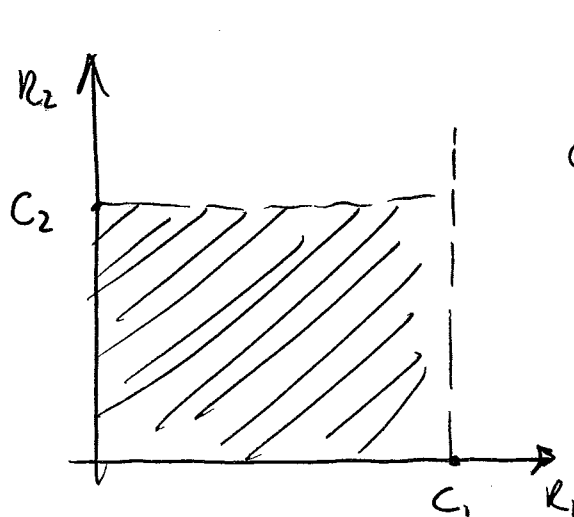
La regione di capacità è la chiusura dell'insieme di tutte le coppie di Torni raggiungibili

ESEMPIO: CANALI ORTOGONALI



$$C_1 = \max_{P(x_1)} I(x_1; y_1)$$

$$C_2 = \max_{P(x_2)} I(x_2; y_2)$$



$$0 \leq R_1 \leq C_1$$

$$0 \leq R_2 \leq C_2$$

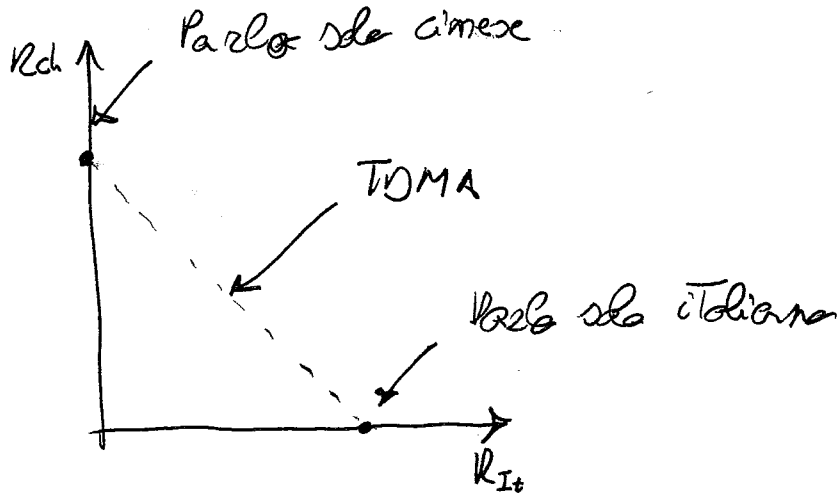
Se c'è $R_0 \rightarrow \begin{cases} R_1 + R_0 \leq C_1 \\ R_2 + R_0 \leq C_2 \end{cases}$

Broadcast Channels e TDMA

(81)

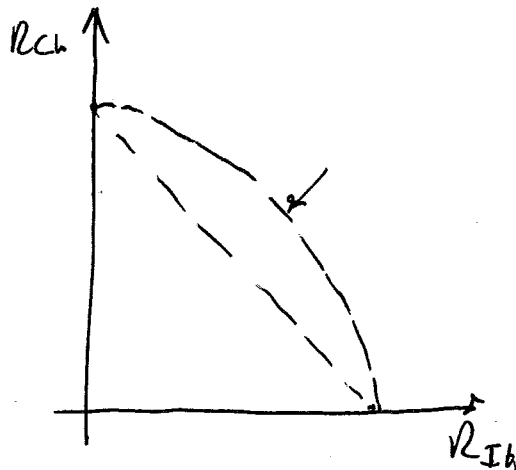
Si vuol comunicare informazione ad un cinese ed un italiano nella medesima stanza.

- Chi parla conosce sia cinese che italiano
- Chi ascolta conosce solo la propria lingua



Ma:

- Chi ascolta è in grado di distinguere se una parola è nella propria lingua!
- mette un po' di informazione nella struttura della segmentazione del discorso



Th: La regione di capacità dipende solo dalle dist. marginali condizionate $p(y_1/x)$ e $p(y_2/x)$ e non da $p(y_1, y_2/x)$. (72)

Ovvero dati 2 DM-BC $p(y_1, y_2/x)$ e $\tilde{p}(y_1, y_2/x)$

con $p(y_1/x) = \tilde{p}(y_1/x)$ e $p(y_2/x) = \tilde{p}(y_2/x)$

Se (R_1, R_2) sono raggiungibili con $p(y_1, y_2/x)$

allora lo sono anche con $\tilde{p}(y_1, y_2/x)$ (e con la medesima sequenza di codici).

Dim:

$$P_e^{(n)} \rightarrow 0$$

$$P_e^{(n)} = P_r \{ \hat{w}_1 \neq w_1, \text{ o } \hat{w}_2 \neq w_2 \} =$$

$$= P_r \{ g_1(Y_1) \neq w_1, \text{ o } g_2(Y_2) \neq w_2 \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_e^{(n)} \geq P_r \{ g_1(Y_1) \neq w_1 \} = P_1^{(n)} \\ P_e^{(n)} \geq P_r \{ g_2(Y_2) \neq w_2 \} = P_2^{(n)} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{|l} P_1^{(n)} \rightarrow 0 \text{ ①} \\ P_2^{(n)} \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} P_e^{(n)} \geq \max\{P_1^{(n)}, P_2^{(n)}\} \text{ ②} \end{array}$$

$P_1^{(n)}$ e $P_2^{(n)}$ dipendono solo dalle statistiche $p(y_1/x)$ e $p(y_2/x)$ rispettivamente. $\Rightarrow P_1^{(n)} = \tilde{P}_1^{(n)}$ $P_2^{(n)} = \tilde{P}_2^{(n)}$ UNION BOUND

ma (usa $\tilde{p}(y_1, y_2/x)$)

$$\tilde{P}_e^{(n)} = \tilde{P}_r \{ \hat{w}_1 \neq w_1, \text{ o } \hat{w}_2 \neq w_2 \} \Rightarrow \max\{\tilde{P}_1^{(n)}, \tilde{P}_2^{(n)}\} \leq \tilde{P}_e^{(n)} \leq \tilde{P}_1^{(n)} + \tilde{P}_2^{(n)}$$

da cui:

$$\max\{P_1^{(n)}, P_2^{(n)}\} \leq P_e^{(n)} \leq P_1^{(n)} + P_2^{(n)}$$

$\rightarrow 0 \qquad \qquad \qquad \rightarrow 0$



Candi Degradati

(73)

Considera un DM-BC



Se $X \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2$ formare una catena di Markov

ovvero se

$$p(y_1, y_2 | x) = p(y_2 | y_1) p(y_1 | x)$$

Allora il canale si dice fisicamente degradato

$$(I(X; Y_1) \geq I(X; Y_2))$$

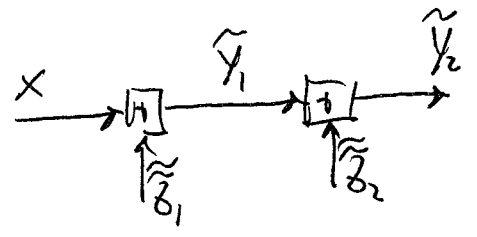
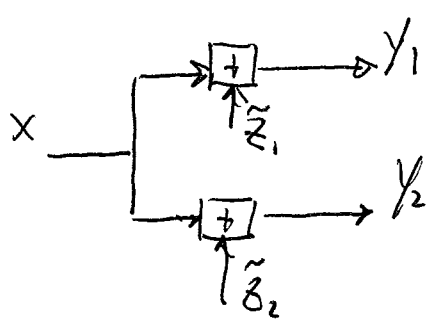
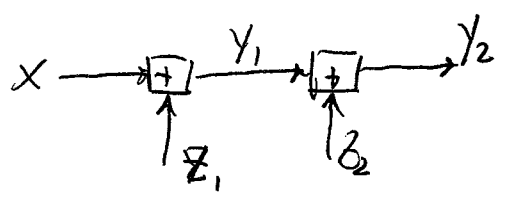
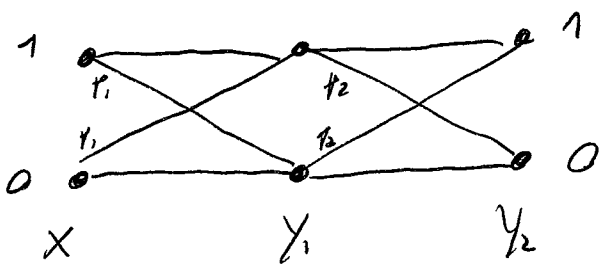
Perché C dipende da $p(y_1 | x)$ e da $p(y_2 | x)$ e non da $p(y_1, y_2 | x)$ se Trova $p'(y_1, y_2 | x)$ con

$$p'(y_1, y_2 | x) = p'(y_2 | y_1) p(y_1 | x) \quad e$$

$$p'(y_2 | x) = \sum_{y_1} p'(y_2 | y_1) p(y_1 | x) = p(y_2 | x)$$

ovvero ha le stesse sorgenti ma è fisicamente degradato

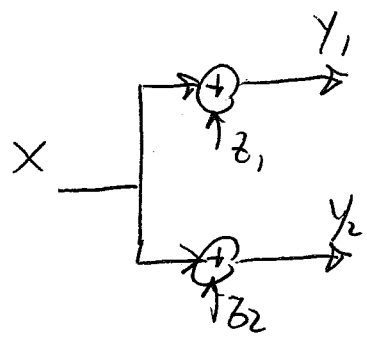
Allora $p(y_1, y_2 | x)$ si dice STOCASTICAMENTE DEG.



è stocasticamente deg.:

————— 0 —————

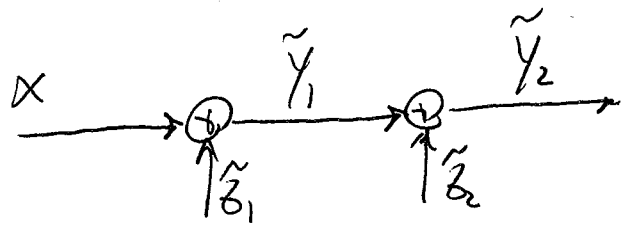
Gaussian broadcast channels



$$z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1) \quad N_1 \leq N_2$$

$$z_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2)$$

è stoc. deg.



$$\tilde{z}_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$$

$$\tilde{z}_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2 - N_1)$$

In un canale degradato l'introduzione di R_0 è 75
irrelevante: Da γ_1 riesce a ricevere tutto il messaggio
per l'utente 2

(R_1, R_2) è raggiungibile $\rightarrow (R_0, R_1, R_2 - R_0)$ è raggiungibile.

In generale deve dedicare una frazione di R_1 e una
frazione di R_2 :

(R_1, R_2) è raggiungibile $\rightarrow (R_0, R_1 - R_0, R_2 - R_0)$ è raggiungibile.

— c —

Th: La regione di capacità è convessa.

Dim: Time sharing. Esercizio.

Th: La regione di capacità C per un DM-BC (26)
 degradato $X \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2$ è data dall'inviluppo
 convesso dell'unione di tutte le regioni ottenute
 fissando arbitrariamente una variabile aleatoria
 ausiliaria $U \sim p(u)$ e una pmf di ingresso $p(x|u)$
 con la seguente descrizione:

$$\begin{cases} R_2 \leq I(u; Y_2) \\ R_1 \leq I(x; Y_1 | u) \end{cases} \quad (*)$$

(Limite $|U| \leq \min\{|X|, |Y_1|, |Y_2|\}$ è sufficiente).

Dim in due parti:

① INNER BOUND

Si mostra che C come definita dal Teorema è un
 inner bound \Rightarrow ogni suo punto è raggiungibile

② OUTER BOUND

Si mostra che C come è definita è un outer bound
 $\Rightarrow (R_1, R_2) \notin \text{raggiungibile} \rightarrow (R_1, R_2) \notin C$

① INNER BOUND

fixare $p(u)$ e $p(x|u)$ se

$$\begin{cases} R_2 < I(u; Y_2) \\ R_1 < I(X; Y_1 | U) \end{cases}$$

allora (R_1, R_2) è raggiungibile. $(U \rightarrow X \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2)$

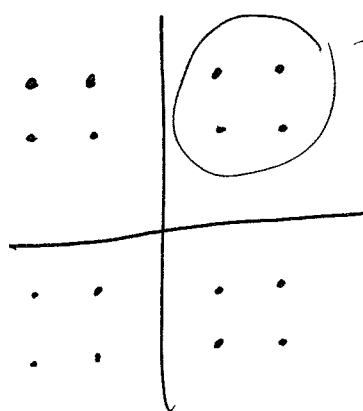
Metodo: RANDOM CODING.

Idea sottostante: SUPERPOSITION CODING

U $U_i \sim p(u)$ iid. Conviene il messaggio per Y_2

X $X_i \sim p(x|U_i)$ " entrambi i messaggi

ESEMPIO CAN GERARCHICA DVB-T



U individua il gruppo
il punto all'interno la parte
usata a Y_1

Si generano 2^{nR_2} parole iid. $\sim p(u)$

Per ciascuna si generano 2^{nR_1} vettori X iid. $\sim p(x|u_i)$

w_2 determina u

w_1 e u determinano x

- Se decodificatore 1 sceglie (\hat{w}_1, \hat{w}_2) se è l'unica coppia di indici con $(\underline{U}(\hat{w}_2), \underline{X}(\underline{U}(\hat{w}_2), \hat{w}_1), Y_1) \in A_\epsilon^{(n)}$

- Se decod. 2 sceglie \hat{w}_2 se è l'unica indice tale che $(\underline{U}(\hat{w}_2), Y_2) \in A_\epsilon^{(n)}$

$P_e^{(n)}$ può essere maggiorato nel solito modo: (ma anche ricordando che $U \rightarrow 1 \rightarrow Y_2$ è un canale single-input single-output)

$$A_\epsilon^{(2)} = \{(\underline{U}(i), Y_2) \in A_\epsilon^{(n)}\}$$

Trasmetta (1,1) (Simmetria della costruzione)

$$\begin{aligned}
 P_e^{(n)(2)} &= P_n \left(\overbrace{A_\epsilon^{(2)}}^{\text{complementor}} \cup \bigcup_{i \neq 1} A_\epsilon^{(2)} \right) \\
 &\leq P_n(\overline{A_\epsilon^{(2)}}) + \sum_{i \neq 1} P_n(A_\epsilon^{(2)}) \\
 &\leq \epsilon + \sum_{i \neq 1} \frac{2^{-nR_2}}{2} - n(I(U; Y_2) - 2\epsilon) \\
 &= \epsilon + \frac{-n(I(U; Y_2) - R_2 - 2\epsilon)}{2} \rightarrow 0 \text{ se } R_2 < I(U; Y_2)
 \end{aligned}$$

Analogamente a ric. 1 definisco

$$E_{Y_i}^{(1)} = \{(\underline{U}^{(i)}, \underline{Y}_i) \in A_\epsilon^{(1)}\}$$

$$E_{Y_{ij}}^{(1)} = \{(\underline{U}^{(i)}, \underline{X}^{(i)} | j), \underline{Y}_i\} \in A_\epsilon^{(1)}\}$$

$$P_c^{(u, \eta)} = P_r \left\{ \overline{E_{Y_1}^{(1)}} \cup \overline{E_{Y_2}^{(1)}} \cup \bigcup_{\substack{i \neq 1 \\ u \in \mathcal{U}_2}} E_{Y_i}^{(1)} \cup \bigcup_{\substack{i \neq 1 \\ u \in \mathcal{U}_1}} E_{Y_{1i}}^{(1)} \right\}$$

$$\stackrel{U.B.}{\leq} P_r(\overline{E_{Y_1}^{(1)}}) + P_r(\overline{E_{Y_2}^{(1)}}) + \underbrace{\sum_{i=2}^2 P(E_{Y_i}^{(1)})}_{U \rightarrow Y_1} + \sum_{i=2}^2 P(E_{Y_{1i}}^{(1)})_{(- \rightarrow Y_2)}$$

Con Tecniche simili si mostra che

$$P(\overline{E_{Y_{1i}}^{(1)}}) \leq 2^{-n(I(X; Y_1 | U) - 4\epsilon)}$$

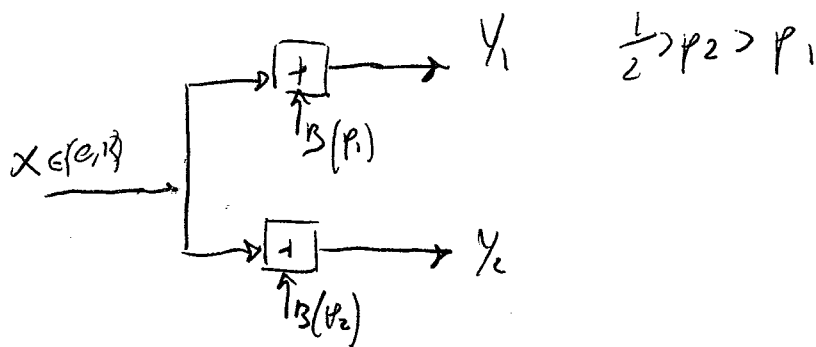
I primi 3 addendi < ε se n è suf grande

Il 4° → 0 se

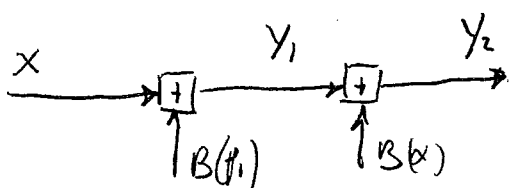
$$R_1 < I(X; Y_1 | U) - 4\epsilon$$

□

Esempio: BSBC



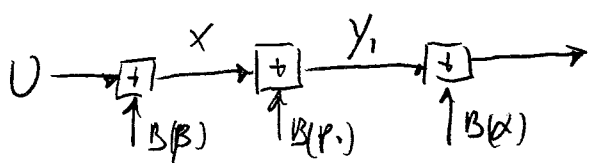
è equiv. a



Per codificare le regioni raggiungibili introduce $U \in (0, 1)$

$$U \rightarrow x \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2$$

$U \rightarrow x$ da binaria a binaria
 use un BSC
 (simmetria)



$$R_2 < I(U; Y_2) = 1 - h(p_2)$$

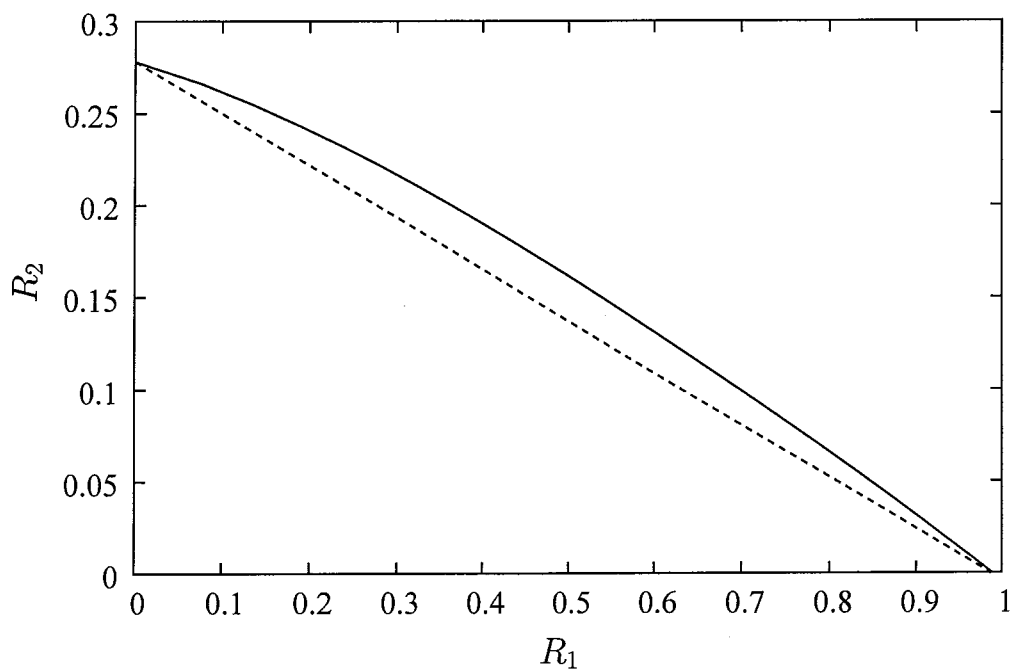
$$U \rightarrow Y_2 \quad \text{BSC} \left(\frac{p(1-p_2) + p_2(1-p)}{Y_2} \right)$$

$$R_1 < I(x; Y_1 | U) = h(p_1) - h(p_2)$$

$$U \rightarrow Y_1 \quad \text{BSC} \left(\frac{p(1-p_1) + p_1(1-p)}{Y_1} \right)$$

$$\begin{aligned} I(x; Y_1 | U) &= H(Y_1 | U) - H(Y_1 | U, x) \\ &= H(Y_1 | U) - H(Y_1 | x) \\ &= h(p_1) - h(p_2) \end{aligned}$$

81



$$r_1 = 10^{-3}$$

$$r_2 = 0.2$$

Martén's Region

Per un campione generico $p(y_1, y_2/x)$

Se si introducono due v.v. U e V correliz. indep. da Y_1 e Y_2

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \rightarrow X \rightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \text{allora}$$

Th (Martén '35) (~~vedi anche~~ Martén 79, IT-25)

$$R_1 < I(U; Y_1)$$

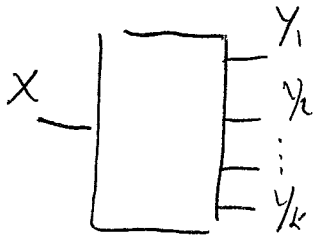
$$R_2 < I(V; Y_2)$$

$$R_1 + R_2 < I(U; Y_1) + I(V; Y_2) - I(U; V)$$

e raggiungibile.

Candi Degradati con r utenti

(83)



$$X \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow Y_k$$

Si introducono $r-1$ variabili ausiliarie $U_{k-1} \rightarrow U_k \rightarrow \dots \rightarrow U_1$

$$\text{con } U_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow U_1 \rightarrow X \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_k$$

Allora:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_k < I(U_{k-1}; Y_k) \\ R_{k-1} < I(U_{k-2}; Y_{k-2} | U_{k-1}) \\ \vdots \\ R_2 < I(U_1; Y_2 | U_2) \\ R_1 < I(X; Y_1 | U_1) \end{array} \right.$$

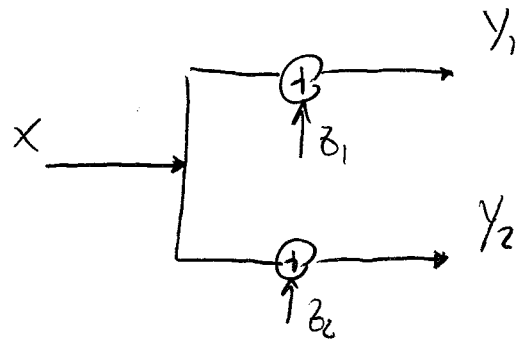
[Berghmans 73]

e' raggiungibile

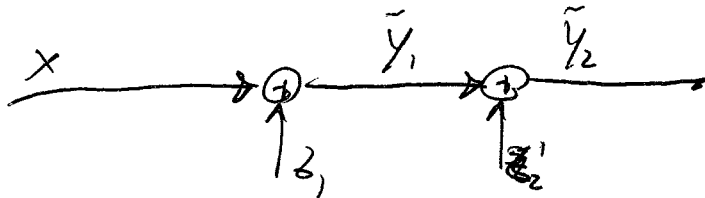
(per la parte inversa: Gallager '74 P.P.1.)

Canali Broadcast Gaussiani

(84)



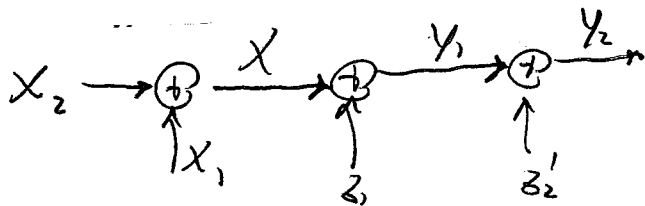
Vincolo $E\{X^2\} \leq P$



$$z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$$

$$z_2' \sim \mathcal{N}(0, N_2 - N_1)$$

$$U \equiv X_2 \quad X = X_1 + X_2$$



$$R_2 < I(X_2; Y_2) \leq \frac{1}{2} \log(1 + \text{SNR}_2) = C(\text{SNR}_2)$$

$$R_1 < I(X_1; Y_1 | X_2) = I(X_1; X_1 + z_1) \leq \frac{1}{2} \log(1 + \text{SNR}_1) = C(\text{SNR}_1)$$

θ' = si ottiene con X_1 e X_2 gaussiani e

$$\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 = P \quad \gamma_{X_1} + \gamma_{X_2} = 0$$

$$\alpha \triangleq \frac{\sigma_{X_1}^2}{P} \Rightarrow$$

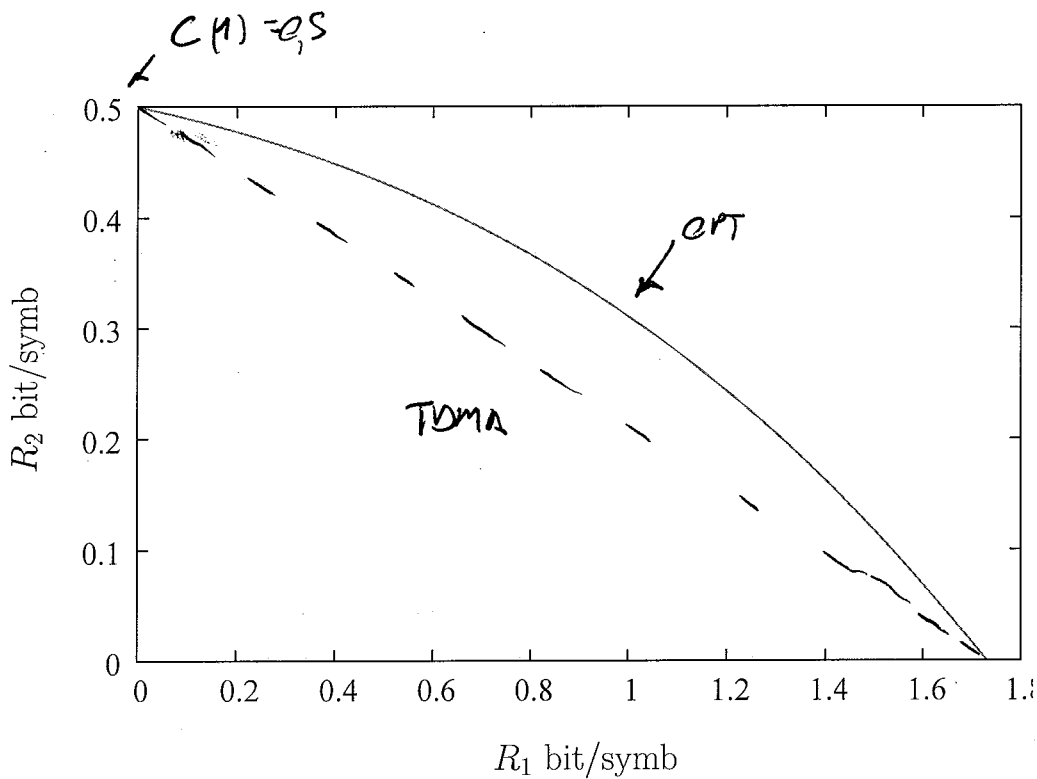
$$\text{SNR}_2 = \frac{(1-\alpha)P}{\alpha P + N_2}$$

$$\text{SNR}_1 = \frac{\alpha P}{N_1}$$

\Rightarrow

$$R_2 \leq C\left(\frac{(1-\alpha)P}{\alpha P + N_2}\right)$$

$$R_1 \leq C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right)$$



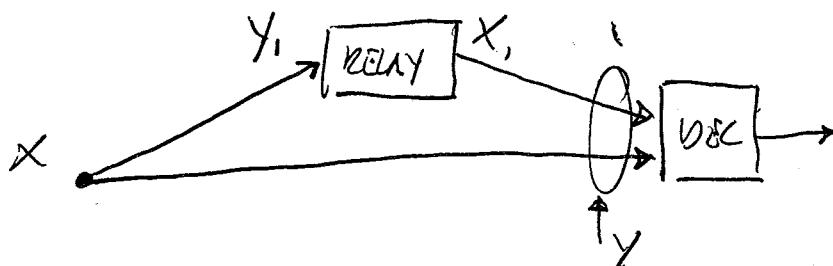
$P = 10 \quad N_1 = 1 \quad N_2 = 10$

In generale; con K utenti

$$R_i \leq C \left(\frac{\alpha_i P}{N_i + \sum_{j < i} \alpha_j P} \right) \quad i = 1, \dots, K$$

[Bergmans '74]

RELAY CHANNEL



Trasmette $\underline{x}(w) \in \mathcal{X}^n$

Riceve (y_{11}, \dots, y_{1n}) al relay che trasmette $x_{1i} = f(y_{11}, \dots, y_{1i})$

Riceve y al rx e decide

il canale è def da $p(y, y_1 | x, x_1)$

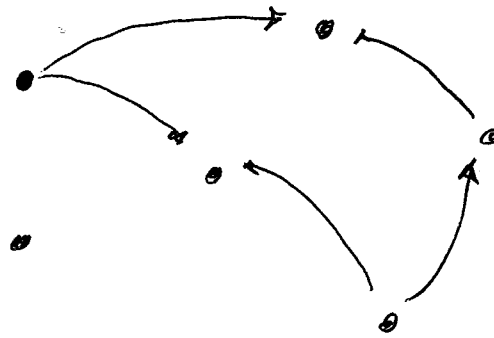
Che capacità C ha questo canale?

In generale:

$$C \leq \sup_{p(x, x_1)} \min \{ I(x, x_1; Y), I(x; Y, Y_1 | x_1) \}$$

Se $p(y, y_1 | x, x_1) = p(y_1 | x, x_1) p(y | y_1, x_1)$ (degraded)

$$C = \sup_{p(x, x_1)} \min \{ I(x, x_1; Y), I(x; Y_1 | x_1) \}$$



il nodo i influenza un po' con forza $R^{(i)}$ il nodo j
indip. l'una dall'altra

Cond:

$$P(y^{(1)}, \dots, y^{(m)} | x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$$

Codifica ammettendo dip. dai simboli ricorretti prec.

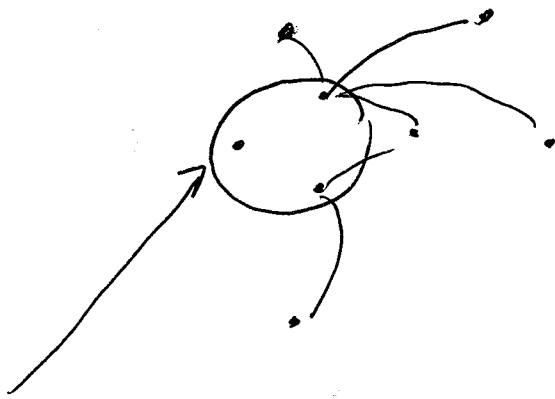
$$X_*^{(i)}(\omega^{(i1)}, \dots, \omega^{(im)}, y_1^{(i)}, \dots, y_{k-1}^{(i)})$$

Se $S \subseteq \{1, \dots, m\}$ $X^{(S)} \equiv X^{(S)} = \{X_1, X_2, X_S\}$ $S = 1, 2, S$

Vde il seguito

Th: Se $P_e^{(m)} \rightarrow 0$ allora

$$\sum_{i \in S, j \notin S} R^{(ij)} \leq I(X^{(S)}; Y^{(\bar{S})} | X^{(\bar{S})}) \quad \forall S \subseteq \{1, \dots, m\}$$



CUT SET ! DIVIDE LA RETE IN 2

BOUND SUI FLUSSI DA DENTRO A FUORI

(OUTER BOUND)



In generale non si possono calcolare C
e se anche si riesce in teoria, può essere proib.
da un punto di vista numerica!

Ci stiamo ponendo le domande giuste? [Eppres 2003]
ISIT

Potrebbero esserci altre grandezze interessanti...