Introduzione agli equalizzatori

R. Pighi

1 Introduzione

Indipendentemente dalla forma dell'impulso formante con cui viene creata la forma d'onda da trasmettere sul canale e dalla forma dell'impulso del filtro di ricezione, una certa quantità di interferenza intersimbolica rimane sempre nel segnale in uscita dal filtro di ricezione e dal campionatore. Tale ISI residua è legata al progetto imperfetto di tali filtri, al fatto che il canale abbia caratteristiche tempo varianti, etc... Consideriamo quindi il segnale ricevuto

$$y(t) = \sum a_k p(t - kT) + n(t)$$

dove T è l'intervallo di segnalazione, $p(t)$ l'impulso complessivo (cascata di impulso di trasmissione e impulso di ricezione), $\{a_k\}$ la sequenza di informazione e $n(t)$ un processo di rumore tempo continuo Gaussiano bianco. Supponiamo inoltre che $p(t)$ sia un impulso non di Nyquist: dopo il campionatore a frequenza di simbolo otteniamo

$$y_k = y(kT) = a_k + n_{\mathrm{ISI}} + n_k$$

dove a_k è il simbolo di informazione trasmesso, n_{ISI} è la parte di segnale che comprende l'ISI residua e n_k è il campione di rumore (in generale correlato).

Il termine n_{ISI}, in particolare, è una variabile casuale che dipende da come l'impulso $p(t)$ risulta essere distorto e può dipendere dai valori a_k precedenti e futuri rispetto al campione relativo all'istante di campionamento. Possiamo supporre che n_{ISI} sia una variabile casuale gaussiana, a media nulla e varianza σ^2_{ISI}, indipendente da n_k. Allora la variabile casuale $n_{\mathrm{ISI}} + n_k$ risulta essere ancora gaussiana, a media nulla e varianza $\sigma^2_{\mathrm{TOT}} = \sigma^2_{\mathrm{ISI}} + \sigma^2_n$. Poiché si vuole ridurre la probabilità d'errore, e quindi massimizzare il rapporto tra la potenza di segnale e quella di rumore, occorre avere σ^2_{TOT} piccolo, quindi si deve minimizzare la varianza di n_{ISI}.

Quindi in generale, o prima del campionatore (equalizzatore analogico) o dopo il campionatore (equalizzatore numerico), viene introdotto un filtro con

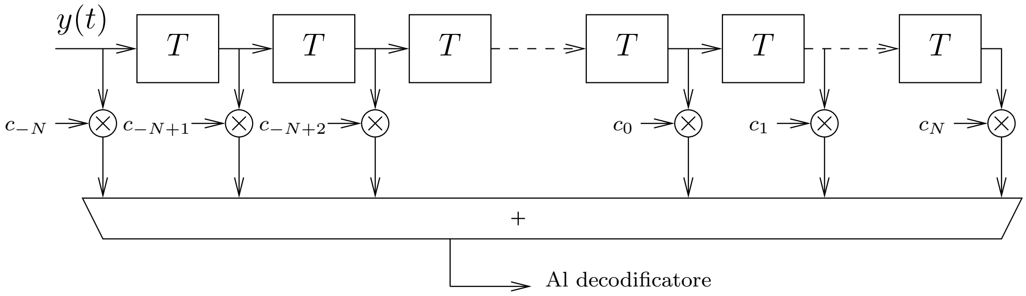

Figura 1: Equalizzatore lineare a coefficienti variabili con $2N + 1$ prese.

il compito di ridurre l'interferenza intersimbolica presente sul segnale. Tale filtro è mostrato in figura 1. Il filtro mostrato in figura ha $2N + 1$ "prese" ed è un equalizzatore analogico: i coefficienti c_i sono i pesi dell'equalizzatore. La risposta all'impulso di questo filtro risulta essere

$$h(t) = c_{-N}\delta(t) + c_{-N+1}\delta(t - T) + \cdots + c_N\delta(t - 2NT) \,.$$

Il segnale equalizzato, in assenza di rumore, risulta essere

$$p_{eq}(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n p(t - nT - NT) \,.$$

Se l'impulso $p(t)$ è tale da non introdurre ISI, allora tutte le prese dell'equalizzatore sono nulle eccetto c_0, cioè l'unico effetto dell'equalizzatore è l'introduzione di un ritardo. Se invece $p(t)$ non è di Nyquist, allora occorre determinare i pesi c_i in maniera tale da *forzare a zero* i campioni di interferenza intersimbolica residui. Occorre quindi determinare i coefficienti in maniera tale che

$$p_{eq}(kT + NT) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2 Progetto di un equalizzatore

Se quindi campioniamo l'impulso equalizzato, otteniamo

$$p_{eq}(kT + NT) = \sum_{n=-N}^{N} c_n p(kT + NT - nT - NT) = \sum_{n=-N}^{N} c_n p_{k-n}$$

cioè otteniamo la convoluzione discreta tra i campioni del filtro di equalizzazione ed i campioni dell'impulso $p(t)$. Dalla conoscenza dei campioni p_{k-n}, determiniamo i campioni dell'equalizzatore. Teoricamente vorremmo ottenere infiniti zeri ed un valore massimo in coincidenza dell'istante di campionamento. Poiché però abbiamo a disposizione solo $2N+1$ valori di c_n, riusciremo solo ad avere $2N$ zeri. Riusciremo quindi a non avere ISI solo per un certo numero di campioni intorno all'istante di campionamento.

Per ottenere i pesi dell'equalizzatore, occorre risolvere il semplice sistema lineare ottenuto imponendo la condizione (1):

$$\begin{cases} c_{-N}p_0 + c_{-N+1}p_1 + \cdots + c_N p_{2N} = 0 \\ \vdots \\ c_{-N}p_N + c_{-N+1}p_{N-1} + \cdots + c_N p_N = 1 \\ \vdots \\ c_{-N}p_{2N} + c_{-N+1}p_{2N-1} + \cdots + c_N p_0 = 0\,. \end{cases}$$

Nell'esempio successivo si presenta il progetto di un equalizzatore numerico.

ESERCIZIO: Un segnale PAM ha espressione $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p(t-kT)$. I simboli a_k, equiprobabili ed indipendenti, appartengono all'alfabeto $\{\pm 1\}$, mentre l'impulso $p(t)$ ha trasformata di Fourier a radice di coseno rialzato, con *roll-off* uguale a 0.5 e con intervallo di segnalazione $T = 9 \cdot 10^{-5}$ s. Si vuole trasmettere il segnale su un canale affetto da rumore Gaussiano bianco additivo, con densità spettrale di potenza $N_0/2$.

- Ipotizzando infine che il canale di trasmissione abbia funzione di trasferimento pari a

$$H(f) = \begin{cases} 1 + 0.3e^{-\jmath 2\pi f T} & \text{se } |fT| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

  al fine di ridurre il più possibile l'interferenza intersimbolica introdotta, dimensionare un equalizzatore a 3 prese.

SOLUZIONE: La risposta in frequenza del canale risulta essere perció

$$H(f) = 1 + 0.3e^{-\jmath 2\pi f T} \quad |fT| \le \frac{1}{2}$$

da cui è possibile ricavare la risposta all'impulso del canale

$$h(t) = \delta(t) + 0.3\delta(t - T)\,.$$

Come stadio di ricezione, consideriamo un ricevitore a filtro adattato all'impulso di tipo a radice di coseno rialzato e campionatore a frequenza di simbolo. L'impulso $g(t)$ all'uscita del filtro di ricezione avrà spettro del tipo

$$G(f) = P^2(f)[1 + 0.3e^{-\jmath 2\pi f T}]$$

e quindi l'impulso $g(t)$ risulterà essere

$$g(t) = p_{CR}(t) + 0.3p_{CR}(t - T)$$

dove con $p_{CR}(t)$ si è indicato l'impulso complessivo a coseno rialzato: supponiamo inoltre che $p_{CR}(0) = 1$. All'uscita del campionatore a intervalli $t = kT$ otteniamo l'impulso discreto

$$g_k = g(t = kT) = p_{CR}(kT) + 0.3p_{CR}[(k - 1)T]$$

per cui il segnale su cui effettuare la decisione risulta essere

$$r_k = a_k + 0.3a_{k-1}\,.$$

Dimensioniamo quindi un equalizzatore a 3 prese. L'impulso $q(t)$ all'uscita dell'equalizzatore può essere espresso come

$$q(t) = c_0 g(t) + c_1 g(t - T) + c_2 g(t - 2T)$$

dove c_0, c_1, c_2 sono i coefficienti delle prese dell'equalizzatore. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} q(kT) &= c_0 g(kT) + c_1 g[(k-1)T] + c_2 g[(k-2)T] \\ &= c_0[\delta_k + 0.3\delta_{k-1}] + c_1[\delta_{k-1} + 0.3\delta_{k-2}] + c_2[\delta_{k-2} + 0.3\delta_{k-3}]\,. \quad (2) \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni

$$\begin{cases} q(0) = 0 \\ q(1) = 1 \\ q(2) = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
q(0) &= c_0 g(0) + c_1 g[(0-1)T] + c_2 g[(0-2)T] \\
q(T) &= c_0 g(T) + c_1 g[(1-1)T] + c_2 g[(1-2)T] \\
q(2T) &= c_0 g(2T) + c_1 g[(2-1)T] + c_2 g[(2-2)T] \,.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Infine, sostituendo nella (3) i campioni dell'impulso $g(kT)$, si ottiene il sistema

$$
\begin{cases}
c_0 = 0 \\
c_0 0.3 + c_1 = 1 \\
c_1 0.3 + c_2 = 0
\end{cases}
$$

la cui risoluzione porta ad avere

$$
\begin{cases}
c_0 = 0 \\
c_1 = 1 \\
c_2 = -0.3 \,.
\end{cases}
$$