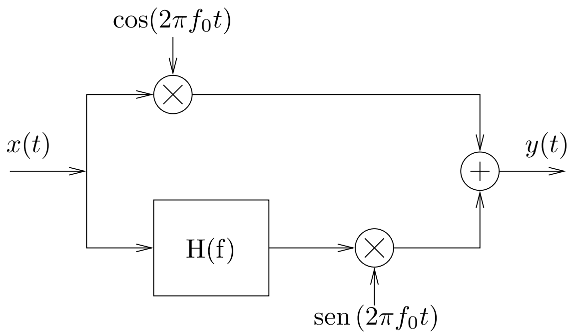
COMUNICAZIONI ELETTRICHE

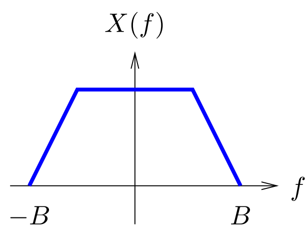
Diploma Universitario
Ingegneria Elettronica - Ingegneria Informatica

ESERCIZIO 1: Si consideri il sistema mostrato in figura. Il filtro ha risposta in frequenza $H(f) = -\jmath \,\mathrm{segn}\,(f)$, dove la funzione $\mathrm{segn}\,(f)$ risulta essere definita come

$$\mathrm{segn}\,(f) = \begin{cases} 1 & \text{se } f \geq 0 \\ -1 & \text{se } f < 0 \,. \end{cases}$$

Ponendo in ingresso al sistema il segnale $x(t)$ il cui spettro è mostrato in figura, si determini lo spettro del segnale $y(t)$.





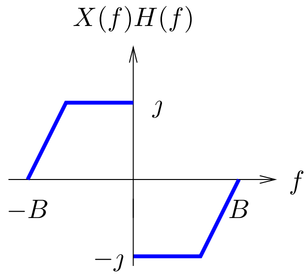
SOLUZIONE ESERCIZIO 1: Dallo schema a blocchi di figura possiamo ricavare l'espressione analitica del segnale $y(t)$:

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + [x(t) * h(t)]\,\mathrm{sen}\,(2\pi f_0 t)\,.$$

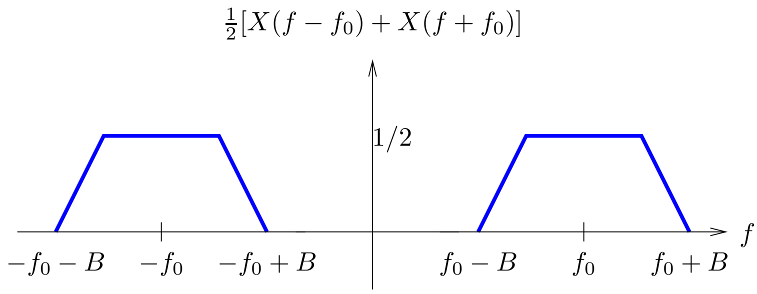
Passando nel dominio della frequenza, otteniamo

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right] + \frac{1}{2\jmath}\left[X(f-f_0)H(f-f_0) - X(f+f_0)H(f+f_0)\right]$$

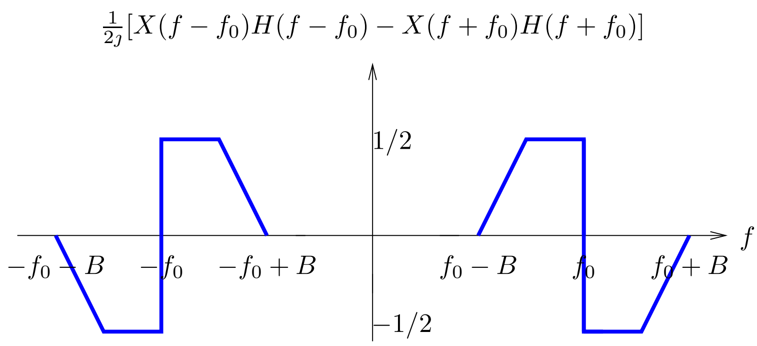
Poichè, all'uscita del filtro $H(f)$ abbiamo un segnale con trasformata di Fourier come indicato in figura



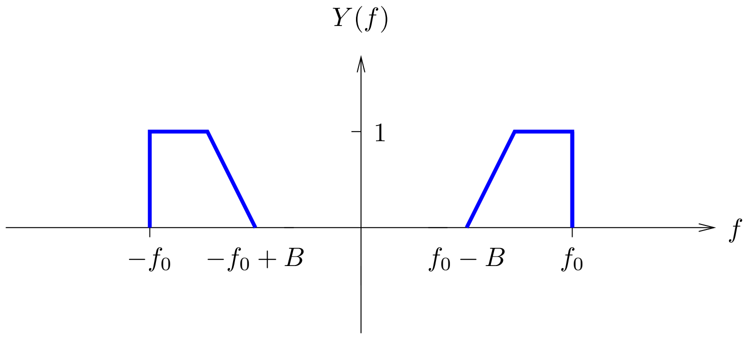
siamo quindi in grado di disegnare le risposte in frequenza delle due parentesi quadrate con cui abbiamo scritto il segnale $y(t)$. Infatti dalla prima ricaviamo



mentre dalla seconda ricaviamo

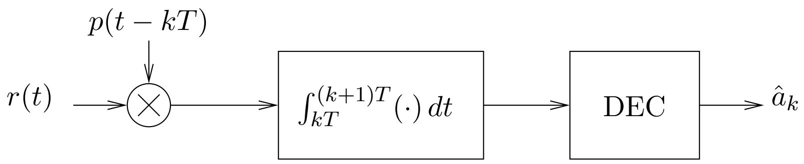


Sommando infine i due termini otteniamo lo spettro di figura, dal quale si deduce che lo schema a blocchi presentato effettua una modulazione SSB-LB.



ESERCIZIO 2: Un segnale PAM ha espressione $s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p(t-iT)$. I simboli a_i, equiprobabili ed indipendenti, appartengono all'alfabeto $\{\pm 1\}$, mentre l'impulso $p(t)$ ha trasformata di Fourier $P(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)e^{-\jmath 2\pi fT/2}$, con $T = 9 \cdot 10^{-5}$ s.

- Si determini la densità spettrale di potenza $s(t)$ e se ne disegni il grafico.
- Il segnale è trasmesso su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza $N_0/2$, con $N_0 = 2{\cdot}10^{-5} V^2/Hz$. In ricezione si utilizza lo schema mostrato in figura, in cui DEC è un decisore a soglia con soglia zero. Si determini la probabilità d'errore di tale sistema.



SOLUZIONE ESERCIZIO 2: Per poter ricavare l'espressione analitica della densità spettrale di potenza di $s(t)$, occorre per prima cosa individuare la sequenza di autocorrelazione della sequenza di informazione a_i. In particolare essa risulta uguale a

$$R_a(n) = \begin{cases} \sigma_a^2 + m_a^2 & \text{se } n = 0 \\ \sigma_a^2 & \text{se } n \neq 0 \,. \end{cases}$$

Calcoliamo quindi il valor medio e la varianza di tale sequenza: abbiamo che il valor medio risulta essere dato da

$$m_a \triangleq E\{a_i\} = \sum_i a_i P(a_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

mentre la varianza risulta essere

$$\sigma_a^2 \triangleq E\{a_i^2\} - E^2\{a_i\} = \sum_i a_i^2 P(a_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1\,.$$

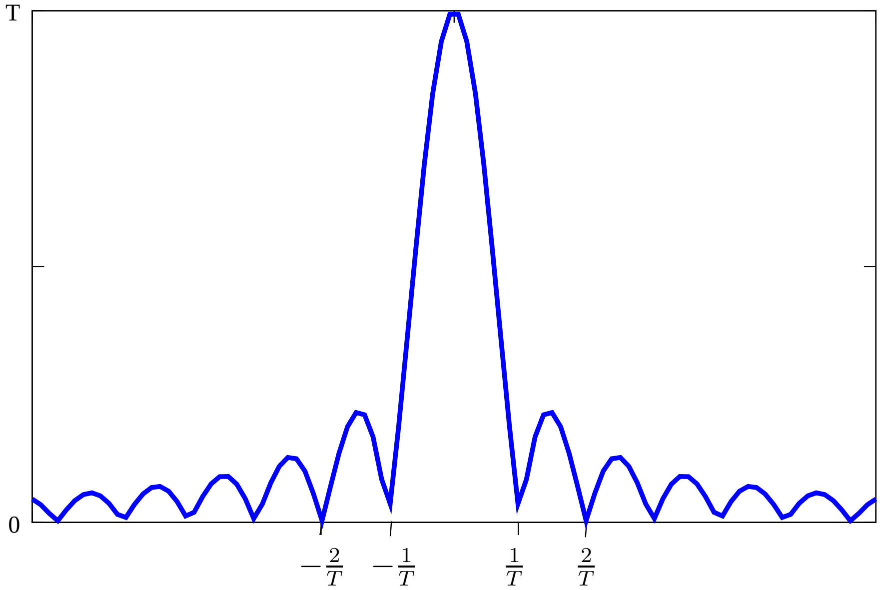
Dalla teoria sappiamo che un segnale modulato PAM ha uno spettro di potenza dato dalla espressione

$$G(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|P(f)|^2 + \left(\frac{m_a}{T}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|P\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) .$$

Poichè i simboli di informazione sono a media nulla, nello spettro di potenza non compaiono delle righe, per cui otteniamo

$$G_s(f) = \frac{\sigma_a^2}{T}|P(f)|^2 ,$$

il cui grafico è riportato in figura.



All'uscita del blocco integratore otteniamo una versione discretizzata del segnale ricevuto. Infatti si ha

$$y_k = \int_{kT}^{(k+1)T} r(t)p(t-kT)\,dt$$

dove

$$r(t) = s(t) + w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p(t-iT) + w(t) .$$

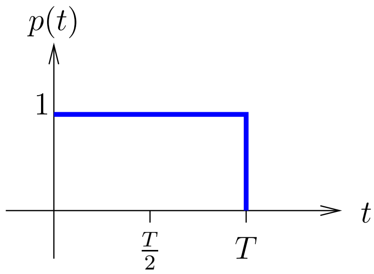
Possiamo quindi scrivere

$$y_k = \int_{kT}^{(k+1)T} a_k p(t-kT)\,p(t-kT)\,dt + \int_{kT}^{(k+1)T} w(t)p(t-kT)\,dt = x_k + n_k$$

Possiamo, a questo punto, fare alcune osservazioni. Il rumore gaussiano bianco additivo risulta essere filtrato dalla risposta all'impulso dell'integratore a finestra mobile. Calcoliamo perciò la sua potenza:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= E\{n_k^2\} = E\left\{\int_{kT}^{(k+1)T} w(t)p(t-kT)\,dt \int_{kT}^{(k+1)T} w(\alpha)p(\alpha-kT)\,d\alpha\right\} \\
&= \int_{kT}^{(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} \underbrace{E\{w(t)w(\alpha)\}}_{\text{Autocorrelazione di } w(t)} \; p(t-kT)\,p(\alpha-kT)\,dt\,d\alpha \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{kT}^{(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} p(t-kT)\,p(\alpha-kT)\delta(t-\alpha)\,dt\,d\alpha \\
&= \frac{N_0}{2}\int_{kT}^{(k+1)T} p^2(\alpha-kT)\,d\alpha\,.
\end{aligned}$$

Occorre quindi avere nota l'espressione analitica dell'impulso formante $p(t)$ e poi effettuare l'operazione di integrazione. In figura è quindi riportato l'andamento, nel tempo, dell'impulso $p(t)$.



Possiamo quindi calcolare la potenza di rumore:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}\cdot T\,.$$

Possiamo inoltre osservare come l'impulso formante non introduca interferenza intersimbolica, in quanto a durata finita e pari all'intervallo di segnalazione T. Calcoliamo infine la probabilità d'errore P_e: abbiamo

$$\begin{aligned}
P_e &= P\{y_k > 0|a_k = -1\}P\{a_k = -1\} + P\{y_k < 0|a_k = +1\}P\{a_k = +1\} \\
&= \frac{1}{2}P\{-1 + n_k > 0|a_k = -1\} + \frac{1}{2}P\{1 + n_k < 0|a_k = 1\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} p_n(\alpha+1)\,d\alpha + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} p_n(\alpha-1)\,d\alpha \\
&= Q\left(\frac{T}{\sigma_n}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T^2}{N_0T}}\right) = Q(3)\,.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3: Un segnale PAM ha espressione $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p(t - kT)$. I simboli a_k, equiprobabili ed indipendenti, appartengono all'alfabeto $\{\pm 1\}$, mentre l'impulso $p(t)$ ha trasformata di Fourier a radice di coseno rialzato, con *roll-off* uguale a 0.5 e con intervallo di segnalazione $T = 9 \cdot 10^{-5}$ s. Si vuole trasmettere il segnale su un canale affetto da rumore Gaussiano bianco additivo, con densità spettrale di potenza $N_0/2$, con $N_0 = 2 \cdot 10^{-6} V^2/Hz$.

- Ipotizzando infine che il canale di trasmissione abbia funzione di trasferimento pari a

$$H(f) = \begin{cases} 1 + 0.3 e^{-\jmath 2\pi f T} & \text{se } |fT| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

  al fine di ridurre il più possibile l'interferenza intersimbolica introdotta, dimensionare un equalizzatore a 3 prese.

- Calcolare la potenza del rumore termico all'uscita di tale filtro.

SOLUZIONE ESERCIZIO 3: La risposta in frequenza del canale risulta essere perció

$$H(f) = 1 + 0.3 e^{-\jmath 2\pi f T} \quad |fT| \leq \frac{1}{2}$$

da cui è possibile ricavare la risposta all'impulso del canale

$$h(t) = \delta(t) + 0.3\delta(t - T)\,.$$

Come stadio di ricezione, consideriamo un ricevitore a filtro adattato all'impulso di tipo a radice di coseno rialzato e campionatore a frequenza di simbolo. L'impulso $g(t)$ all'uscita del filtro di ricezione avrà spettro del tipo

$$G(f) = P^2(f)[1 + 0.3 e^{-\jmath 2\pi f T}]$$

e quindi l'impulso $g(t)$ risulterà essere

$$g(t) = p_{CR}(t) + 0.3 p_{CR}(t - T)$$

dove con $p_{CR}(t)$ si è indicato l'impulso complessivo a coseno rialzato: supponiamo inoltre che $p_{CR}(0) = 1$. All'uscita del campionatore a intervalli $t = kT$ otteniamo l'impulso discreto

$$g_k = g(t = kT) = p_{CR}(kT) + 0.3 p_{CR}[(k-1)T]$$

per cui il segnale su cui effettuare la decisione risulta essere

$$r_k = a_k + 0.3 a_{k-1}\,.$$

Dimensioniamo quindi un equalizzatore a 3 prese. L'impulso $q(t)$ all'uscita dell'equalizzatore può essere espresso come

$$q(t) = c_0 g(t) + c_1 g(t - T) + c_2 g(t - 2T)$$

dove c_0, c_1, c_2 sono i coefficienti delle prese dell'equalizzatore. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} q(kT) &= c_0 g(kT) + c_1 g[(k-1)T] + c_2 g[(k-2)T] \\ &= c_0[\delta_k + 0.3\delta_{k-1}] + c_1[\delta_{k-1} + 0.3\delta_{k-2}] + c_2[\delta_{k-2} + 0.3\delta_{k-3}] \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Imponendo le condizioni

$$\begin{cases} q(0) = 0 \\ q(1) = 1 \\ q(2) = 0 \end{cases}$$

dalla (1) si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_0 0.3 + c_1 = 1 \\ c_1 0.3 + c_2 = 0 \end{cases}$$

la cui risoluzione porta ad avere

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = -0.3 \,. \end{cases}$$

Calcoliamo infine la potenza del rumore termico in uscita dall'equalizzatore. Abbiamo che il rumore termico $n_1(kT)$ dopo l'equalizzatore può essere espresso in funzione del rumore $n(kT)$ prima di tale equalizzatore

$$n_1(kT) = c_0 n(kT) + c_1 n[(k-1)T] + c_2 n[(k-2)T] \,.$$

Poiché l'autocorrelazione del processo $n(kT)$ risulta essere il campionamento di quella del processo tempo continuo $n(t)$ abbiamo

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) * p(\tau) * p(-\tau) = \frac{N_0}{2} g_{CR}(\tau)$$

da cui è possibile calcolare la varianza σ_1^2 del processo $n_1(kT)$ che, essendo a media nulla, coincide con il valore quadratico medio. Ricordando infine che i campioni $n(kT)$ del processo di rumore a tempo continuo $n(t)$ sono indipendenti (perchè?), abbiamo

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= E\{n_1^2(kT)\} = E\{[c_0 n(kT) + c_1 n[(k-1)T] + c_2 n[(k-2)T]]^2\} \\ &= (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2)\frac{N_0}{2} = 1.09\frac{N_0}{2} \,. \end{aligned}$$