INTRODUZIONE AI SISTEMI MULTIPORTANTE

Ing. Riccardo Pighi

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università degli Studi di Parma
pighi@tlc.unipr.it

Parma, Venerdì 2 Aprile 2004

Sommario della presentazione

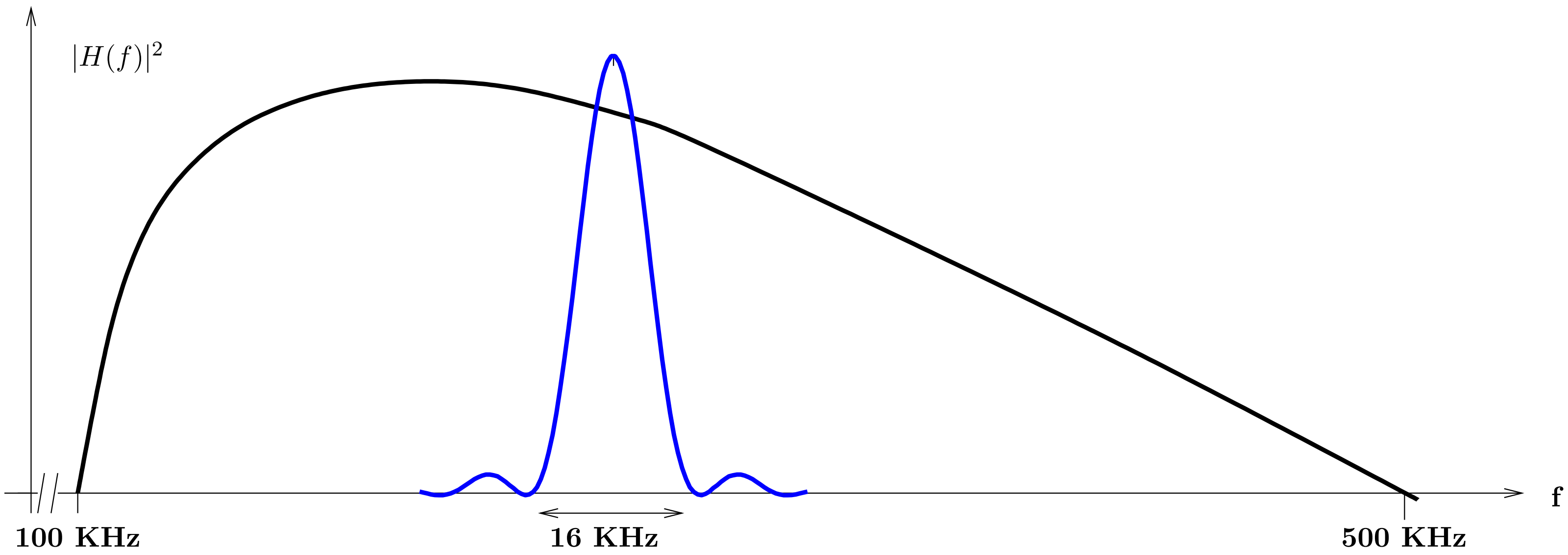
1. Introduzione ai sistemi multiportante

2. Formalizzazione di alcuni concetti base
   - Modulazione tramite FFT
   - Concetto di GAP e di margine di sistema
   - Rapporto segnale rumore geometrico

3. Algoritmi di bit loading
   - Formalizzazione del problema
   - Soluzione analitica
   - Arrotondamenti e "granularità" della costellazione

4. Risultati numerici e conclusioni

Introduzione ai sistemi multiportante



- Una risposta in frequenza del canale non piatta sulla banda di segnalazione obbliga ad una complessa equalizzazione.
- Tale equalizzazione deve essere in grado di compensare le fluttuazioni del canale.
- La presenza di zeri spettrali nel canale risulta essere un fattore critico per la stabilità del sistema.

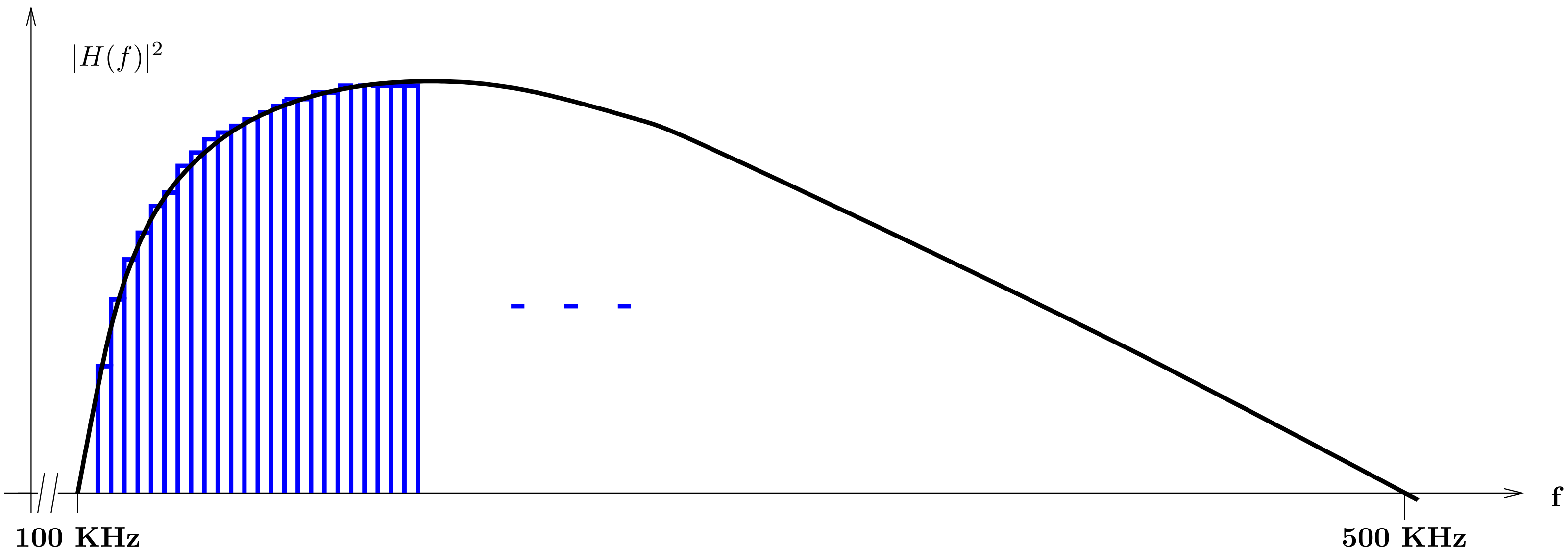
Introduzione ai sistemi multiportante

- Qualora le condizioni del canale degradino sensibilmente, il sistema non è in grado di compensare la distorsione introdotta dal canale.

Soluzione

Sfruttare “meglio” il canale

Introduzione ai sistemi multiportante

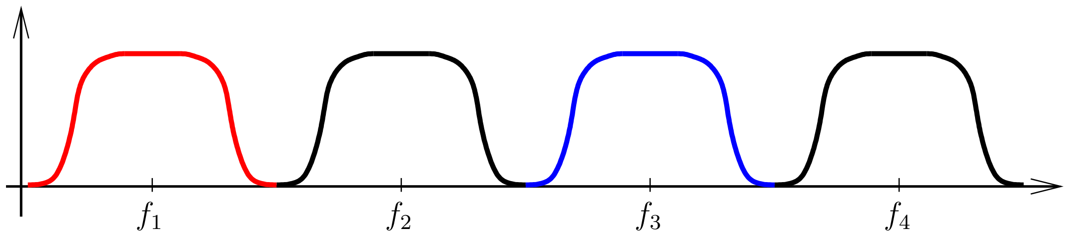


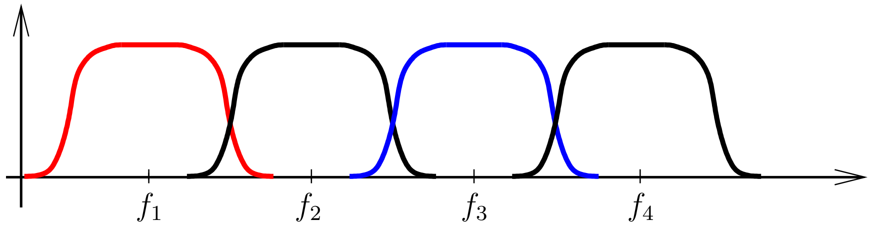
- Si suddivide la risposta in frequenza del canale in tanti sottocanali.
- Ciascun sottocanale può essere pensato come un canale AWGN isolato esente da interferenza intersimbolica.
- Ciascun sottocanale utilizza un formato di modulazione ad elevata efficienza spettrale (QAM M-arie).

Introduzione ai sistemi multiportante

- Già nei sistemi FDM la trasmissione parallela di dati avviene suddividendo la banda disponibile in molti canali.
- La modulazione avviene tra le varie portanti in modo indipendente.
- I vari canali occupano bande relativamente piccole, quindi meno sensibili agli effetti della distorsione dei canali selettivi in frequenza e con rumore impulsivo.
- Allo scopo di eliminare l'interferenza intercanale, gli spettri dei sottocanali non devono sovrapporsi: questo però non consente un utilizzo efficiente della banda disponibile.
- La sovrapposizione spettrale può essere permessa a patto di sfruttare relazioni di ortogonalità tra i canali.

Gli spettri FDM e OFDM





- Nel primo caso di parla di FDM (Frequency Division Multiplexing).
- Nel secondo caso di parla di
  - MCM (Multicarrier Modulation)
  - OFDM (Orthogonally Frequency Division Multiplexing).

Modulazione multicanale: DMT

- Il flusso di informazione, di velocità R bit/s, viene bufferizzato in blocchi di $b = RT$ bit.
- Indichiamo con T il **periodo di segnalazione**.
- Il segnale trasmesso all'interno del periodo di simbolo T prende il nome di **simbolo**.
- Di questi b bit, b_k sono i bit allocati sull'k-esimo canale, per cui il numero di bit complessivamente trasmesso risulta essere

$$b = \sum_{k=1}^{\bar{N}} b_k \, .$$

- Questi b_k bit vengono mappati su punti di costellazioni QAM, in base all'algoritmo di Water-Filling.
- Indicheremo tali punti come $\alpha_n^{(k)} = A_n^{(k)} + jB_n^{(k)}$, dove il pedice indicherà l'istante temporale mentre l'apice indicherà il k-esimo canale.

Modulazione multicanale: DMT

- Le costellazioni sono costituite da 2^{b_i} punti.
- I punti delle costellazioni vengono successivamente riscalati di un fattore g_i, quindi

$$a_n^{(k)} = g_k \alpha_n^{(k)} = g_k A_n^{(k)} + j g_k B_n^{(k)} \,.$$

- Il sottosimbolo $a_n^{(k)}$ ha energia ε_k, definita da

$$E\left\{|a_n^{(k)}|^2\right\} = \varepsilon_k \,. \tag{1}$$

- La potenza del sottosimbolo è definita come

$$P_k = \varepsilon_k / T \,. \tag{2}$$

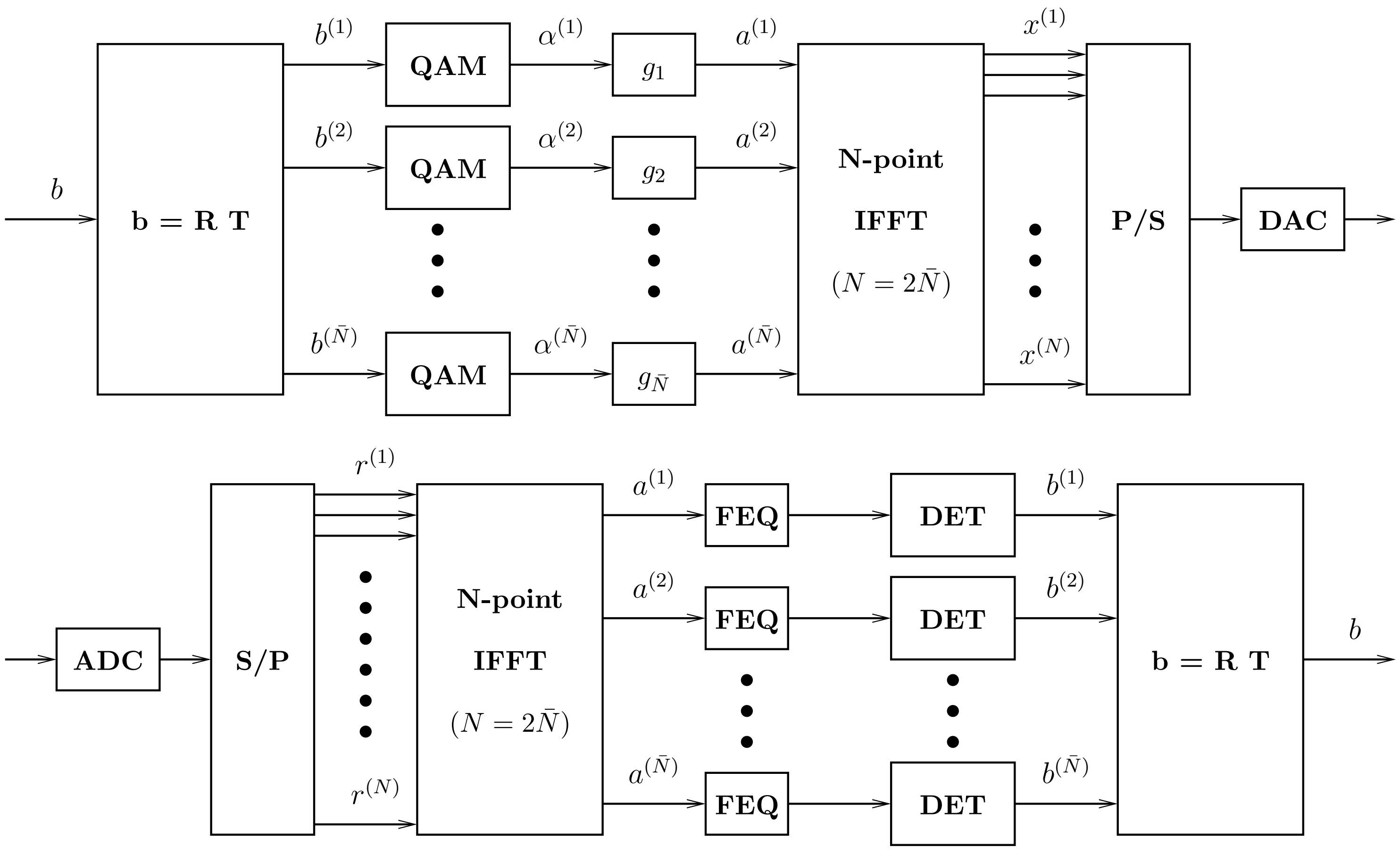
- I coefficienti g_k sono scelti in maniera tale che il sottosimbolo $a_n^{(k)}$ abbia energia ε_k uguale a quella allocata dal procedimento di Water-Filling.

Modulazione multicanale: DMT

- Gli $\bar{N}$ sottosimboli vengono modulati attraverso un blocco che esegue una FFT inversa
- I simboli in uscita dal blocco IFFT vengono serializzati e convertiti da sequenza numerica a segnale analogico
- Il convertitore digitale-analogico opera ad una frequenza di campionamento pari a N/T, dove N indica il numero di punti su cui viene effettuata l'operazione di trasformata discreta di Fourier
- La potenza totale trasmessa risulta quindi essere

$$P = \frac{\varepsilon}{T} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{\bar{N}} \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{\bar{N}} P_i$$

Modulazione multicanale: DMT



Schemi a blocchi del modulatore e demodulatore DMT

Modulazione singolo canale: GAP

- Consideriamo costellazioni QAM quadrate. Indichiamo con d la distanza tra i punti nella costellazione. Supponiamo inoltre i punti equiprobabili.
- L'energia di ciascun punto nella costellazione risulta essere

$$\varepsilon = \frac{M-1}{6} d^2 \tag{3}$$

  dove $M = 2^b$ è una potenza di 4.
- Supponiamo che il canale non introduca ISI e che presenti un guadagno piatto sulla banda di segnalazione pari a $|H|$. La probabilità d'errore per un simbolo QAM può essere approssimata da

$$P_e \leq 4Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)$$

  dove d_{min} è la distanza minima tra i punti della costellazione QAM all'uscita del canale, cioè $d^2_{min} = d^2|H|^2$

Modulazione singolo canale: GAP

- Per garantire un tasso d'errore sul simbolo inferiore a 10^{-6} è necessario avere

$$\left(\frac{d_{min}}{2\sigma}\right)^2 = 14.5\ \mathrm{dB} + \gamma_m\ \mathrm{dB} - \gamma_c\ \mathrm{dB}$$

- La quantità γ_c è il guadagno di codifica
- La quantità γ_m è il margine di sistema, inteso come la frazione di rapporto segnale rumore che può essere persa dal sistema prima che la probabilità d'errore superi il valore di 10^{-6}
- Quando γ_c e γ_m sono nulli, allora il sistema QAM è non codificato e non dispone di margine, per cui occorrono 14.5 dB di SNR per avere il tasso d'errore prefissato
- Quando il sistema è codificato, si riduce il valore di 14.5 dB di una quantità pari al guadagno di codifica
- Quando il sistema ha un margine, il valore di 14.5 dB viene incrementato da tale margine

Modulazione singolo canale: GAP

- Riscrivendo (3) come
$$M = 1 + 6\varepsilon |H|^2 / d_{min}^2 \tag{4}$$
definiamo la quantità Γ come
$$3\Gamma = \frac{d_{min}^2}{4\sigma^2} \tag{5}$$
- Per il tasso d'errore fissato, possiamo quindi scrivere
$$(3\Gamma)[dB] = 14.5 + \gamma_m - \gamma_c[dB]$$
- Prendendo di (4) il logaritmo in base 2 e sostituendo (5) in (4) per d_{min}^2, è possibile calcolare il numero di bit per simbolo QAM (con margine γ_m)
$$b = \log_2(M) = \log_2\left(1 + \frac{SNR}{\Gamma}\right) \tag{6}$$
dove il rapporto segnale rumore SNR è definito come
$$SNR = \frac{\varepsilon |H|^2}{2\sigma^2}$$

Modulazione singolo canale: GAP

- La quantità Γ viene chiamata SNR GAP, poiché il numero di bit che può essere trasmesso in maniera affidabile (secondo Shannon) è inferiore della capacità teorica
$$C = \log_2(1 + SNR)$$
e, in particolare, tale capacità risulta essere quella di un canale con un rapporto segnale rumore ridotto della quantità Γ
- In altre parole, il GAP è una misura della perdita di prestazioni rispetto al caso ottimo
- Nel caso di una modulazione QAM, definendo il margine di lavoro ed il guadagno di codifica, il GAP può essere calcolato come
$$\Gamma = 9.8 + \gamma_m - \gamma_c \tag{7}$$
- Il tasso di informazione aggregato quindi può essere calcolato come
$$R = b/T$$
- Poichè tale proceduta porta alla determinazione di un tasso non intero, si opera un arrotondamento di tale valore ad uno intero desiderato $\bar{R}$

Modulazione singolo canale: GAP

- È quindi possibile ricalcolare il nuovo margine di sistema raggiungibile per un data rate prefissato e con un vincolo sul tasso d'errore
- Infatti riscrivendo (6) e usando la definizione di GAP (7) si ottiene

$$\Gamma = \frac{SNR}{2^b - 1} = 9.8 + \gamma_m - \gamma_c$$

da cui è possibile ricavare il margine del sistema

$$\gamma_m = 10 \log_{10} \left(\frac{SNR}{2^b - 1} \right) + \gamma_c - 9.8 \, [dB]$$

- Il procedimento può iterare fino ad arrivare ad una soluzione accettabile in base alle specifiche di progetto

Sistemi multicanali: SNR geometrico

- In un sistema di trasmissione multicanale, si richiede che tutte le sottoportanti abbiano lo stesso tasso d'errore
- Se ci fosse un canale con un valore di P_e significativamente alto rispetto a quello degli altri canali, questa probabilità d'errore dominerebbe il tasso d'errore aggregato
- Un valore costante di P_e può essere fissato quando tutti i sotto-canali usano uno stesso codice e un gap Γ costante
- In questo caso è conveniente introdurre un singolo parametro con cui caratterizzare le prestazioni di un sistema di trasmissione multiportante
- Tale parametro viene definito come "rapporto segnale rumore geometrico"
- Per un insieme di N canali in parallelo, il numero di bit aggregato medio per dimensione può essere indicato come

$$\bar{b} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{b}_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{SNR_n}{\Gamma}\right)$$

dove $\bar{b}_i$ individua il numero di bit per dimensione del sotto-canale i-esimo

Sistemi multicanali: SNR geometrico

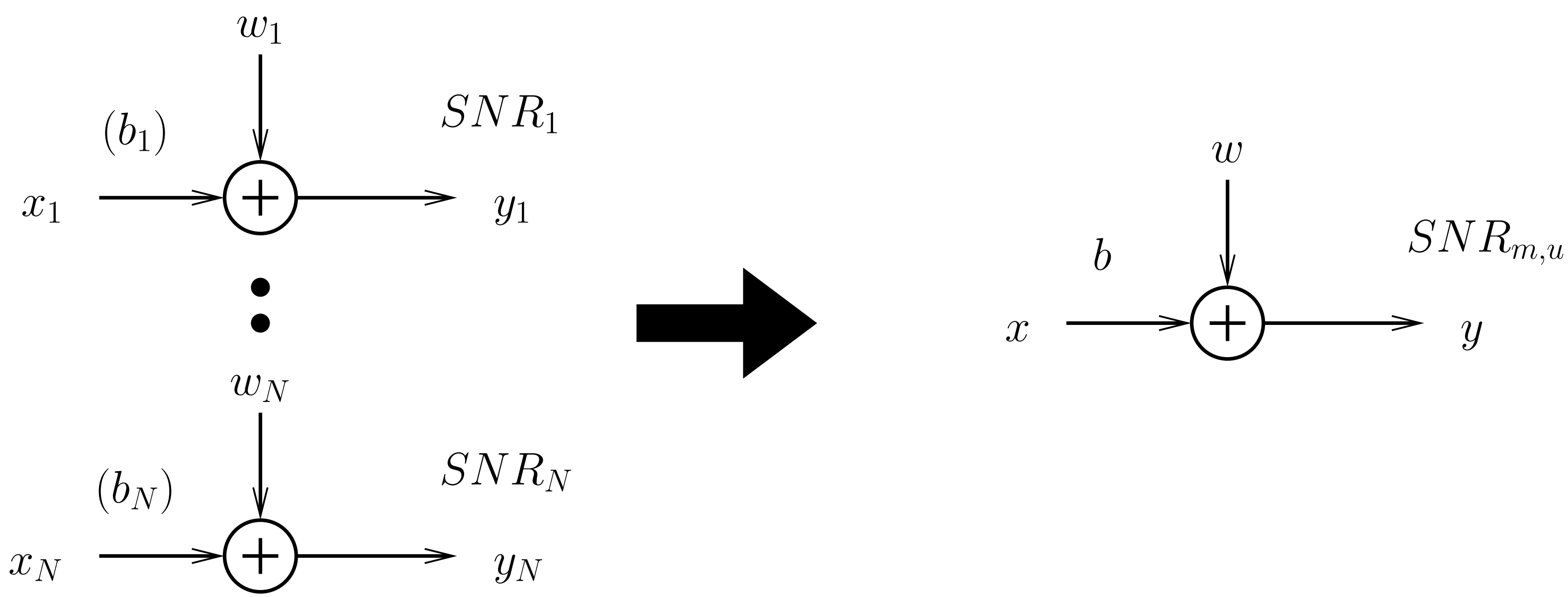
- Supponendo che tutti i sotto-canali adottino costellazioni bidimensionali (QAM, PSK), il numero di bit aggregato medio può essere scritto come

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log_2\left(1+\frac{SNR_n}{\Gamma}\right) \\
&= \frac{1}{N}\log_2\left(\prod_{i=1}^{N}\left[1+\frac{SNR_n}{\Gamma}\right]\right) \\
&\triangleq \log_2\left(1+\frac{SNR_{m,u}}{\Gamma}\right) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

- Si definisce rapporto segnale rumore per un insieme di N canali in parallelo la quantità

$$
SNR_{m,u} = \Gamma \cdot \left[\left(\prod_{i=1}^{N}\left[1+\frac{SNR_n}{\Gamma}\right]\right)^{1/N} - 1\right] \qquad (9)
$$

Sistemi multicanali: SNR geometrico



- Il rapporto segnale rumore multicanale può essere utilizzato per confrontare le prestazioni, in termini di rapporto segnale rumore, tra un sistema a singola portante ed uno multiportante
- La quantità $SNR_{m,u}$ è un rapporto segnale rumore singolo che permette di rappresentare l'insieme degli N sotto-canali in un singolo canale equivalente AWGN caratterizzato dallo stesso tasso aggregato medio di informazione

Sistemi multicanali: SNR geometrico

- Il tasso di informazione è dato dalla (8) come se l'insieme degli N sotto-canali fosse un signolo canale AWGN caratterizzato da un rapporto segnale rumore $SNR_{m,u}$

$$b = \log_2\left(1 + \frac{SNR_{m,u}}{\Gamma}\right)$$

- Se si trascurano i termini $+1$ e -1 nell'espressione (9), il rapporto segnale rumore multicanale può essere approssimato con la media geometrica degli SNR di ciascun sotto-canale, quindi

$$SNR_{m,u} \simeq SNR_{geo} = \left(\prod_{i=1}^{N} SNR_i\right)^{1/N}$$

- La quantità $SNR_{m,u}$ è quella che in letteratura viene comunemente fornita nella definizione delle caratteristiche dei sistemi multiportante

Sistemi multicanali: creazione del collegamento

- Nei sistemi DSL, una prima fase di training viene dedicata alla stima del canale
- Il trasmettitore invia sul canale un pettine di portanti, in maniera che il ricevitore possa effettuare una stima del canale
- A sua volta il ricevitore trasmette lo stesso pettine di portanti in maniera che anche il trasmettitore possa eseguire la medesima stima di canale
- Al termine di questa inizializzazione, Tx e Rx sono sincronizzati e hanno determinato quali portanti attivare o spegnere in funzione della risposta in ampiezza del canale
- Tale sincronizzazione deve essere mantenuta correttamente durante l'intera trasmissione
- Inoltre occorre determinare quanti bit allocare per ciascuna portante e che potenza allocare per ciascun canale
- Nei sistemi ad onda convogliata la potenza massima consentita risulta essere di 40 Watt, su un intervallo di frequenze da 100 KHz a 500 KHz
- Come avviene la determinazione del numero di bit per portante ? $\longrightarrow$ LA

Loading Algorithm: Water Filling

- Fissata la frequenza di segnalazione $1/T$, la massimizzazione del tasso di informazione $R = b/T$ per un sistema multicanale implica la massimizzazione della quantità $b = \sum_n b_n$ in funzione di b_n e di ε_n
- Il numero di bit massimo che puó essere trasmesso quindi deve massimizzare la seguente somma

$$b = \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon_i f_i}{\Gamma}\right) \tag{10}$$

dove f_i rappresenta il rapporto segnale rumore presente all'i-esimo sottocanale, quando il trasmettitore applica una energia unitaria a tale canale, i.e.

$$f_i = \frac{|H_i|^2}{\sigma_i^2}$$

- La quantità f_i è un valore fissato dal canale, mentre l'energia ε_i può essere fatta variare per massimizzare il numero di bit b.
- Il valore assunto da ε_i non è libero, ma soggetto al vincolo energetico

$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = N\bar{\varepsilon}_{\mathbf{x}}$$

Water Filling: definizione del problema

- Possiamo quindi formalizzare il problema dell'attribuzione del numero di bit per i canali di un sistema multiportante come un problema di massimo vincolato

$$\max_{\varepsilon_i} b = \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon_i f_i}{\Gamma}\right) \tag{11}$$

e vincolo

$$N\bar{\varepsilon}_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \tag{12}$$

- Si parla in questo caso di Rate-Adaptive (**RA**) loading criterion
- Si parla invece di Margin-Adaptive (**MA**) loading criterion quando la procedura di allocazione dei bit minimizza l'energia spesa nel sistema avendo come vincolo un numero fissato di bit per simbolo

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon_i} \varepsilon_{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \\ b &= \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{\varepsilon_i f_i}{\Gamma}\right) \end{aligned}$$

Water Filling: soluzione del problema

- Usando i moltiplicatori di Lagrange, la funzione costo (11) soggetta al vincolo (12) può essere scritta come

$$\frac{1}{\ln(2)}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(1+\frac{\varepsilon_i f_i}{\Gamma}\right)+\lambda\left(\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i - N\bar{\varepsilon}_{\mathbf{x}}\right)$$

- Differenziando rispetto ad ε_i si ottiene

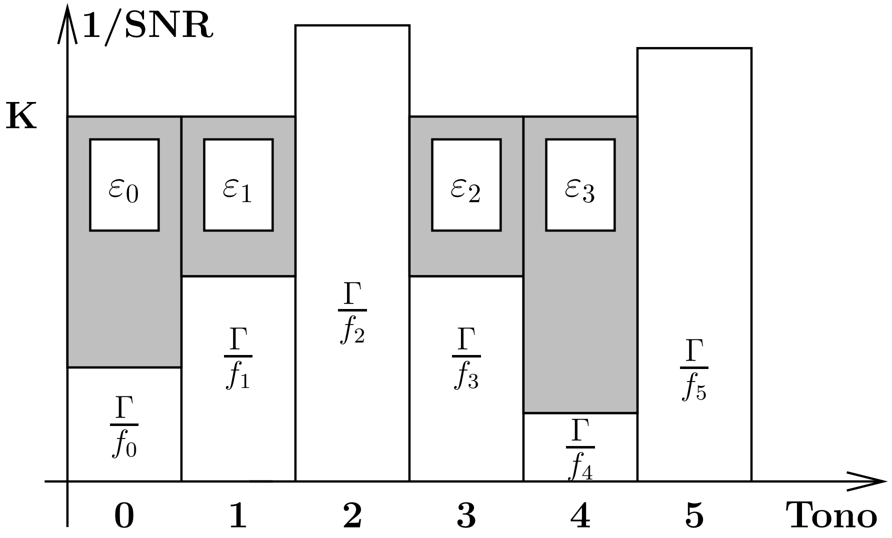
$$\frac{1}{\ln(2)}\left(\frac{1}{\varepsilon_i+\Gamma/f_i}\right)=-\frac{\lambda\Gamma}{f_i}$$

- La (11) è quindi massimizzata, con vincolo (12), quando

$$\varepsilon_i+\frac{\Gamma}{f_i}=K$$

- Ponendo $\Gamma=1$ (0 dB) si raggiunge il massimo valore del tasso di informazione permesso per il sistema multicanale
- La soluzione del problema è nota come "water-filling" in quanto è possibile costruire la soluzione per via grafica immaginando l'inverso della curva dei rapporti segnale-rumore del canale riempita con una energia (water) fino ad un livello costante.

Water Filling: interpretazione grafica



- Quando $\Gamma \neq 1$, la forma del water-filling non cambia, a patto di considerare Γ costante su tutti i sotto-canali.
- Il fattore di scala Γ rende il profilo dell'inverso della curva dei rapporti segnale-rumore più ripido, riducendo quindi il numero di canali utilizzabili
- In figura, 4 canali hanno energia positiva, mentre 2 hanno energia negativa o equivalentemente hanno una potenza di rumore che eccede il valore costante del water-filling
- La soluzione del water-filling è unica poiché la funzione da minimizzare (11) è convessa, per cui la distribuzione ottima di energia esiste ed è unica

Water Filling: soluzione analitica

- L'insieme delle equazioni lineari che hanno come soluzione la distribuzione di energia ottenuta dal water-filling è

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 + \Gamma/f_1 &= K \\
\varepsilon_2 + \Gamma/f_2 &= K \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
\varepsilon_N + \Gamma/f_N &= K \\
\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N &= N\bar{\varepsilon}_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

- Ci sono un massimo di $N+1$ equazioni in $N+1$ incognite (ε_i, $i = 1, \ldots, N$ e la costante K).
- La soluzioni può produrre valori di energie negativi. Se questo accade, il canale con il valore più piccolo di f_i deve essere eliminato e la corrispondente energia posta uguale a zero.
- L'insieme delle equazioni deve essere quindi risolto ricorsivamente eliminando, di volta in volta, il canale con il valore minimo di f_i ed azzerando l'energia di tale canale, finché la distribuzione finale dell'energia ha solo valori positivi

Water Filling: soluzione analitica

- In forma matriciale il sistema diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma/f_1 \\ -\Gamma/f_2 \\ \vdots \\ -\Gamma/f_N \\ N\bar{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

- È possibile risolvere il sistema invertendo la matrice, partendo dalla dimensione massima $N+1$ fino a quella a cui corrisponde una distribuzione di energie tutte positive
- Una soluzione alternativa consiste nel sommare le prime N equazioni per determinarela costante K

$$K = \frac{1}{N}\left[N\bar{\varepsilon}_{\mathbf{x}} + \Gamma\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i}\right] \tag{13}$$

e quindi calcolare il valore di energia per il canale i-esimo

$$\varepsilon_i = K - \frac{\Gamma}{f_i} \quad \forall i = 1, \dots, N\,. \tag{14}$$

Water Filling: soluzione analitica

- Se uno o più valori di ε_i sono negativi, occorre eliminare il più negativo e risolvere (13) e (14) ponendo $N \to N-1$ ed eliminando il canale relativo ad f_i.
- È quindi utile preordinare i canali, in maniera tale che $f_1 = \max_i f_i$ e $f_N = \min_i f_i$. Il passo j-esimo dell'iterazione ($j = 1, \ldots, N$) risulta quindi

$$K = \frac{1}{N-j}\left[\varepsilon_{\mathbf{x}} + \Gamma \sum_{i=1}^{N-j} \frac{1}{f_i}\right]$$

e l'algoritmo termina quando $N^* = N - j$ per il primo valore di j a cui corrisponde una distribuzione di energia ε_i con valori tutti positivi.

- A questo punto, si possono calcolare le energie per i vari sotto-canali attivi come

$$\varepsilon_i = K - \frac{\Gamma}{f_i} \quad \forall i = 1, \ldots, N^* = N - j\,.$$

- Definita quindi la distribuzione dell'enegia, è possibile calcolare il numero di bit per sotto-canale tramite la relazione

$$b_i = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon_i f_i}{\Gamma}\right)\,.$$

Water Filling: alcune considerazioni

- Il numero di bit per sotto-canale, in generale, non è un numero intero.
- Si definisce "granularità" di un sistema di trasmissione multicanale la piú piccola unità incrementale di informazione β che può essere trasmessa. Il numero di bit per ogni sotto-canale è quindi dato da

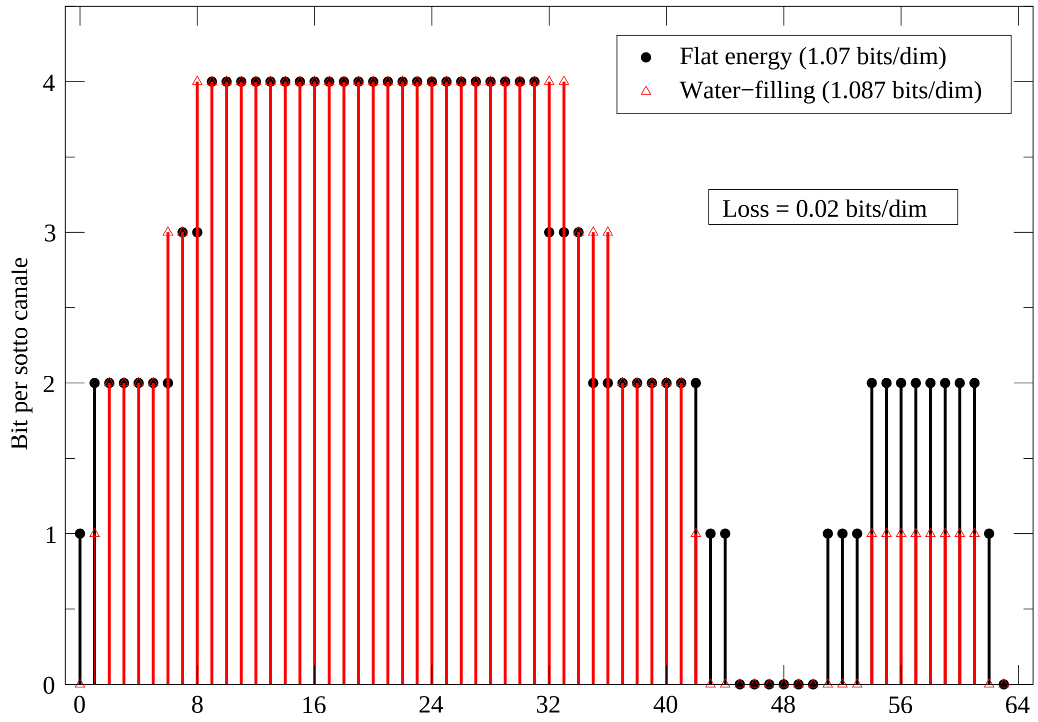
$$b_i = B_i \cdot \beta \tag{15}$$

  cone $B_i \geq 0$.
- Tipicamente il parametro β assume valori 1 o 2 per formati di modulazione "interi", oppure valori $0.25, 0.5, 0.75$ per costellazioni con numero di bit frazionari per simbolo (TCM multidimensionali).
- Tutti i sotto-canali che portano un numero di bit inferiore a 2 vengono inoltre spenti e l'energia di nuovo disponibile viene suddivisa in maniera uniforme tra tutti gli i sotto-canali accesi e con $b_i \geq 2$ (è una possibile scelta).
- L'algoritmo di water-filling determina una distribuzione di energia non piatta. In particolare i valori di energia più alti sono attribuiti ai canali con rapporto segnale rumore migliore, mentre i valori energetici più bassi sono associati ai canali peggiori.
- In realtà le differenze tra questi valori di energie sono piccole.

Water Filling: alcune considerazioni

- È possibile dimostrare che il numero di bit b allocato attraverso la procedura del water-filling differisce di poco da quello ottenibile distribuendo sugli N_{ON} canali attivi un valore di energia uniforme e pari a

$$\varepsilon_j = \bar{\varepsilon}_{\mathbf{x}}/N_{ON} \quad \forall j = 1, \ldots, N_{ON}\,.$$



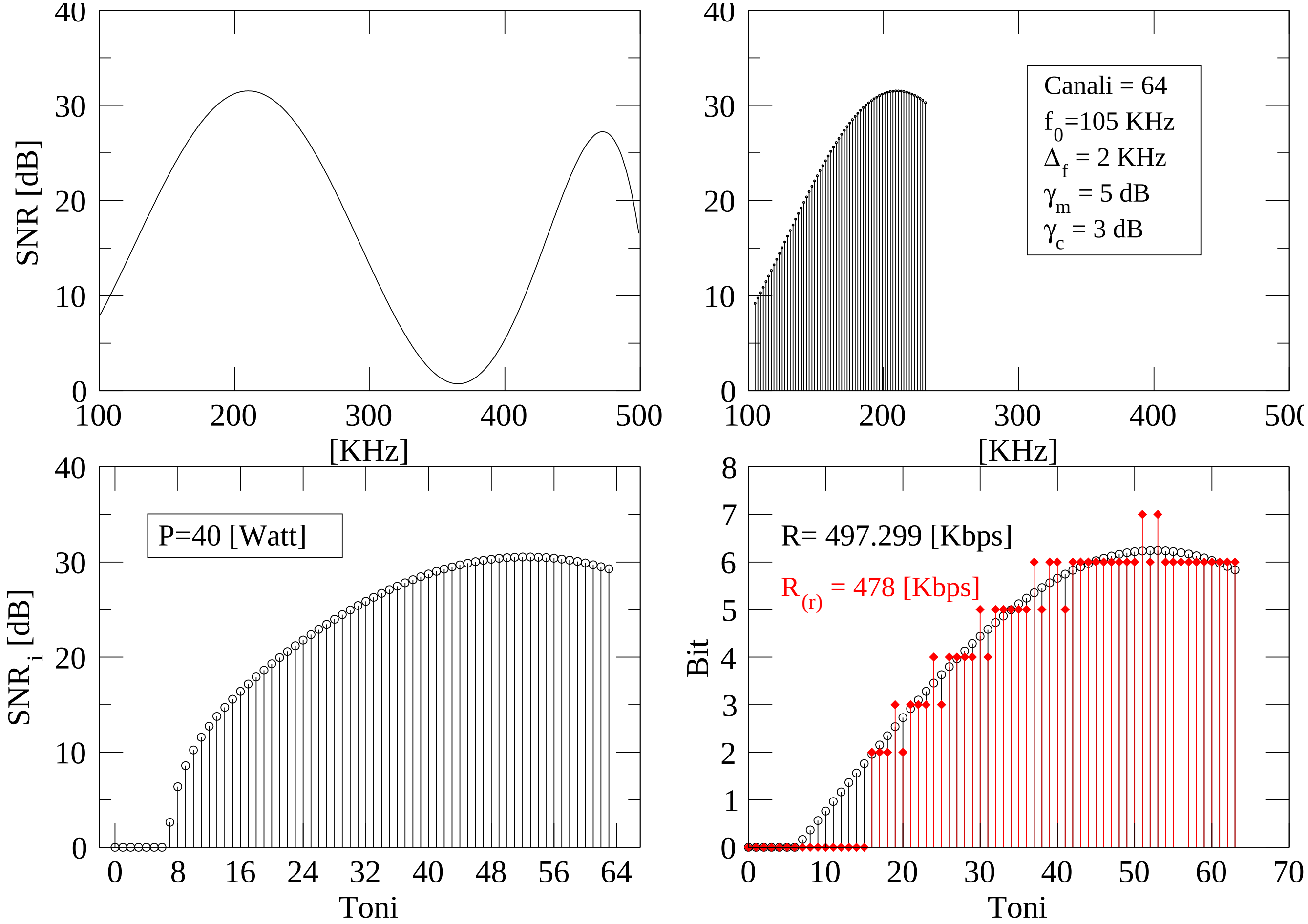
Water Filling: arrotondamento proposto

- Per tutti gli N_{ON} canali attivi, se $b_i < \lfloor b_i \rfloor + 0.5$, allora $b_i = \lfloor b_i \rfloor$
  - Si aggiunge l'energia disponibile ε_i in più dal canale i-esimo a tutti gli altri canali (ad ogni canale si somma $\varepsilon_i/[N_{ON} - 1]$)
  - Occorre ricalcolare la nuova distribuzione dei bit per i rimanenti canali
  - L'ordinamento dei canali non cambia, visto che l'incremento di energia è uguale per tutte le portanti.
- Se invece $b_i > \lfloor b_i \rfloor + 0.5$ allora $b_i = \lfloor b_i \rfloor + 1$
  - Si sottrae l'incremento di enerdia $\Delta\varepsilon_i$ necessario per allocare il bit in più dal canale con il secondo minor numero di bit
  - Occorre ricalcolare il numero di bit per questo secondo canale
  - L'ordinamento ancora non viene modificato, visto che l'energia mancante viene prelevata dal primo canale con energia maggiore di quello arrotondato per eccesso.
- È possibile estendere questo algoritmo introducendo il concetto di granularità.
- La perdita in termini di bit rate è dell'ordine del 3% rispetto a quella ottenibile senza arrotondamento. Tale perdita considera anche lo spegnimento dei canali con $b_i < 2$.

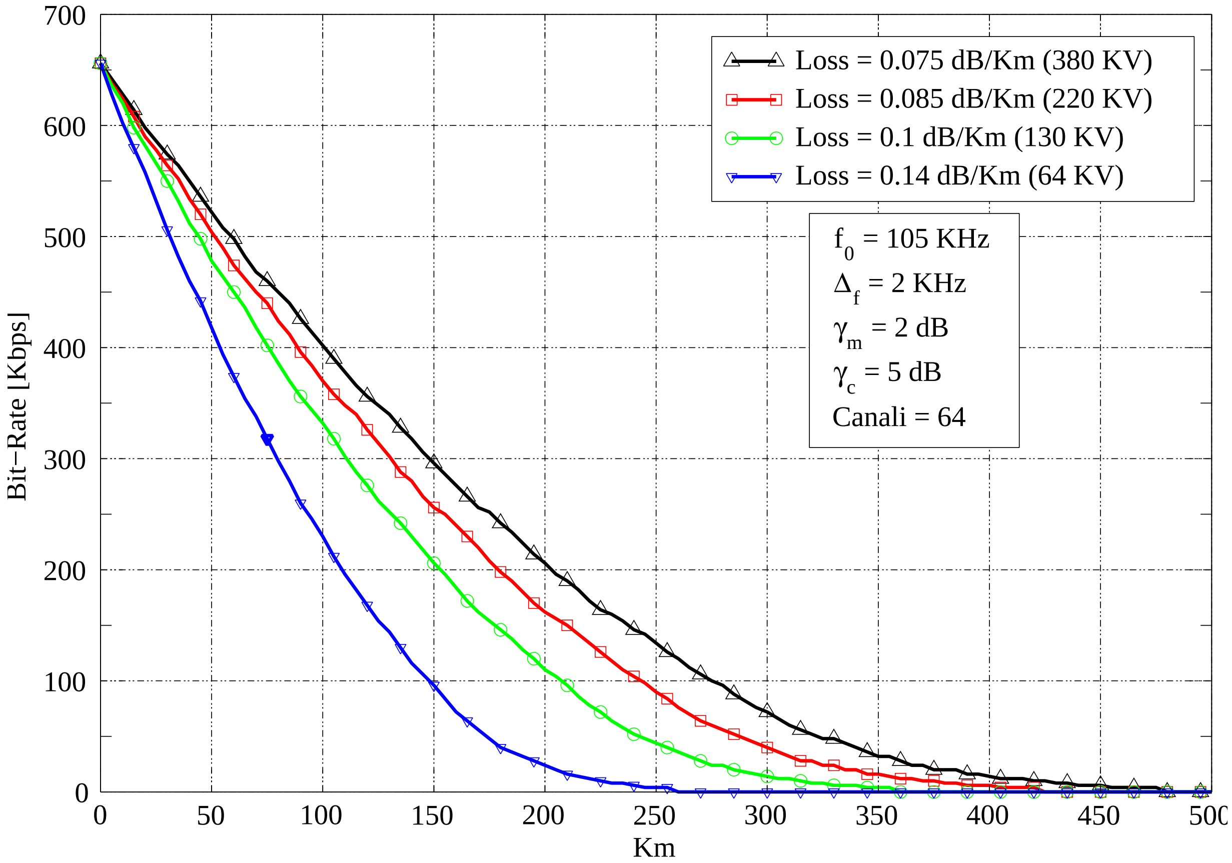
Water Filling: risultati

- Sono stati creati alcuni profili di canale.
- Si è supposta una potenza totale disponibile al trasmettitore di 40 Watt.
- Si è supposto l'utilizzo di un codice con guadagno di codifica pari a γ_c dB.
- Si è imposto un margine di sicurezza al sistema di γ_m dB.
- Sono state analizzate le prestazioni in presenza di attenuazione nulla oppure con attenuazione costante e funzione solo della distanza.
- Si è supposto un piatto di rumore costante su tutte le frequenze del canale.
- Si suppongono noti i soli rapporti segnale rumore per i sottocanali nell'intervallo di frequenze $[100 : 500]$ KHz.
- Si è supposto che i sotto-canali abbiano una banda relativa di 2 KHz.
- La prima frequenza portante è pari a $f_0 = 105$ KHz.
- Si è imposto come vincolo di progetto che tutte le portanti abbiano un tasso d'errore sul bit inferiore a 10^{-6}.

WATER FILLING: PRIMO CANALE

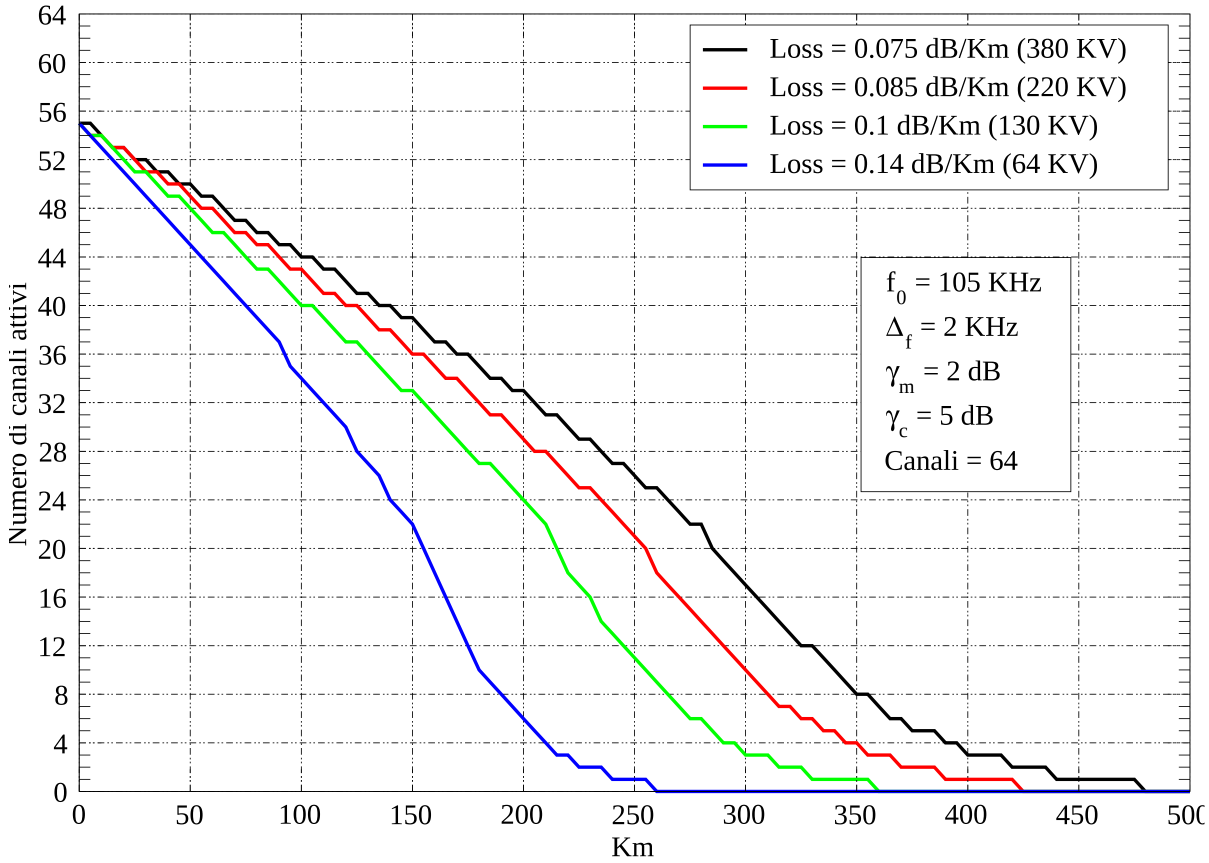


Water Filling: Bit-rate vs. attenuazione (1)



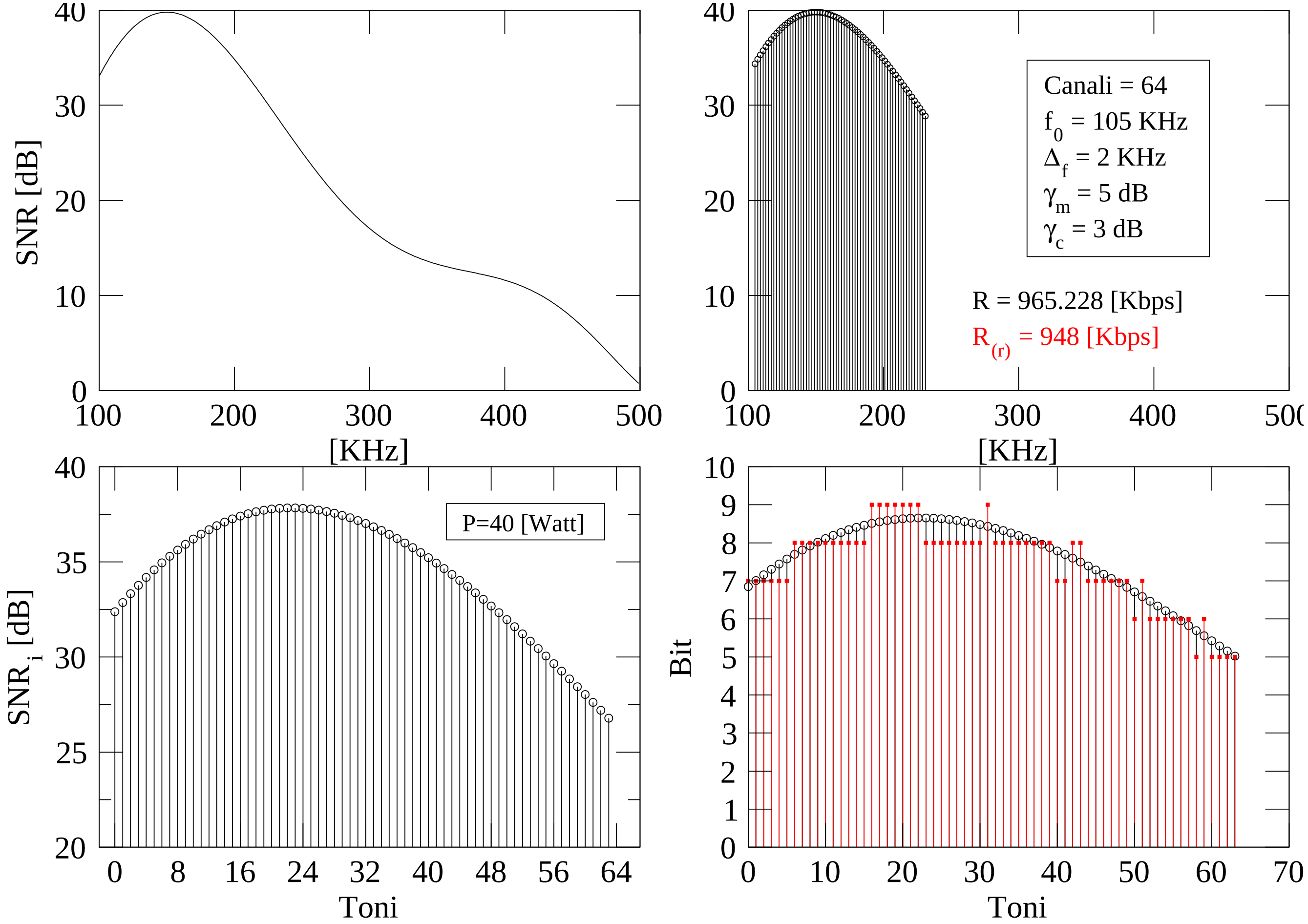
- Si è supposto una attenuazione costante e indipendente dal modo di propagazione e dal tipo di accoppiamento.

Water Filling: Canali attivi vs. attenuazione (1)

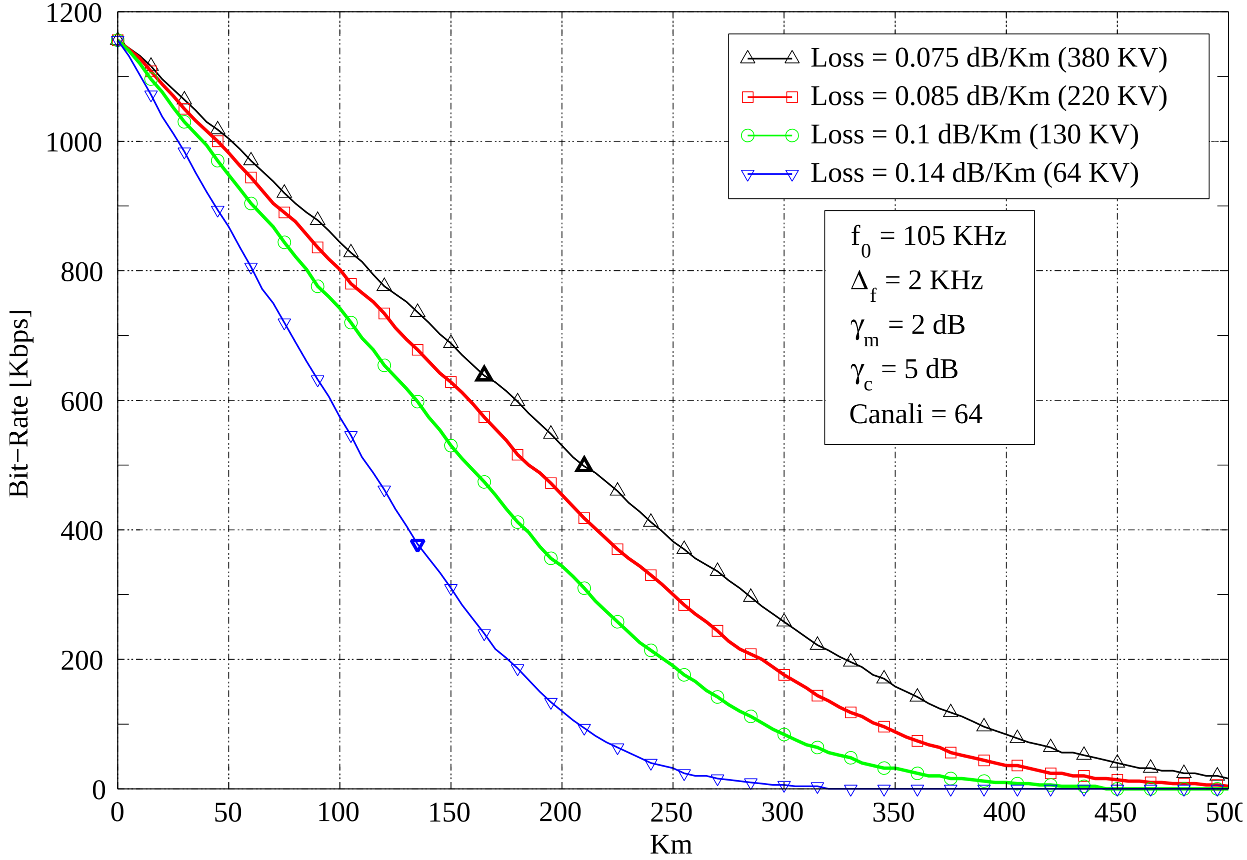


- Nel caso peggiore, la massima distanza percorribile con una sola portante è 257 Km.

Water Filling: secondo canale

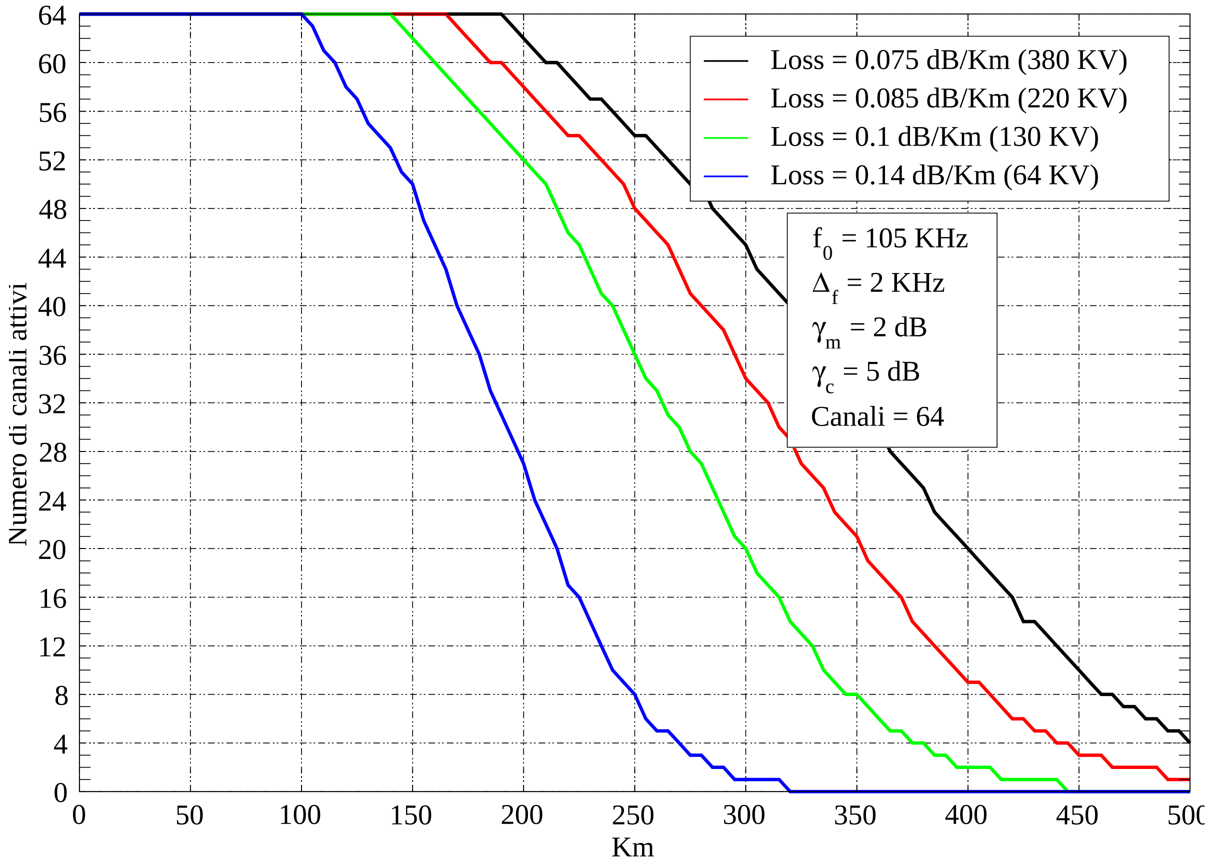


Water Filling: Bit-rate vs. attenuazione (2)



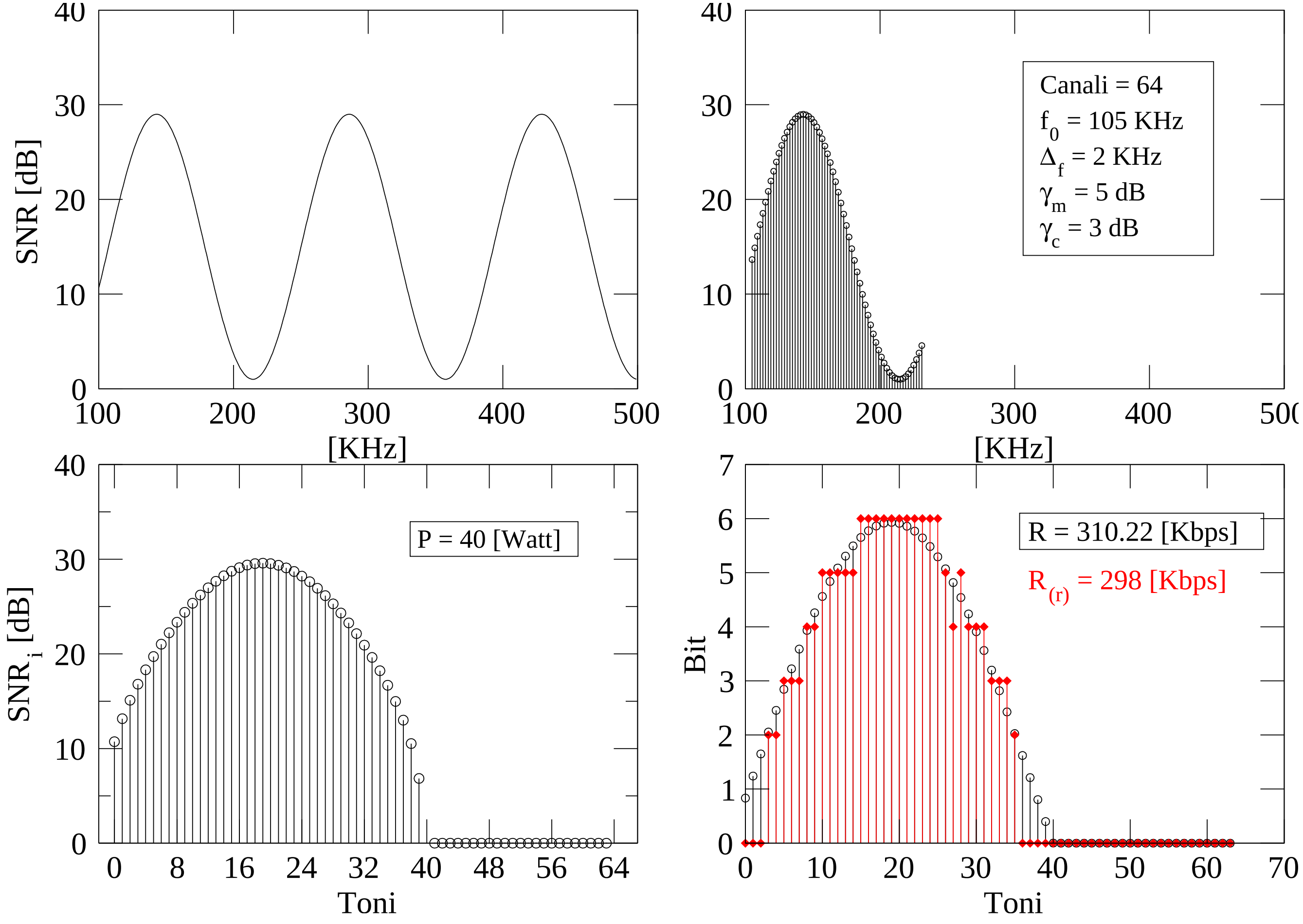
- Si è supposto una attenuazione costante e indipendente dal modo di propagazione e dal tipo di accoppiamento.

Water Filling: Canali attivi vs. attenuazione (2)

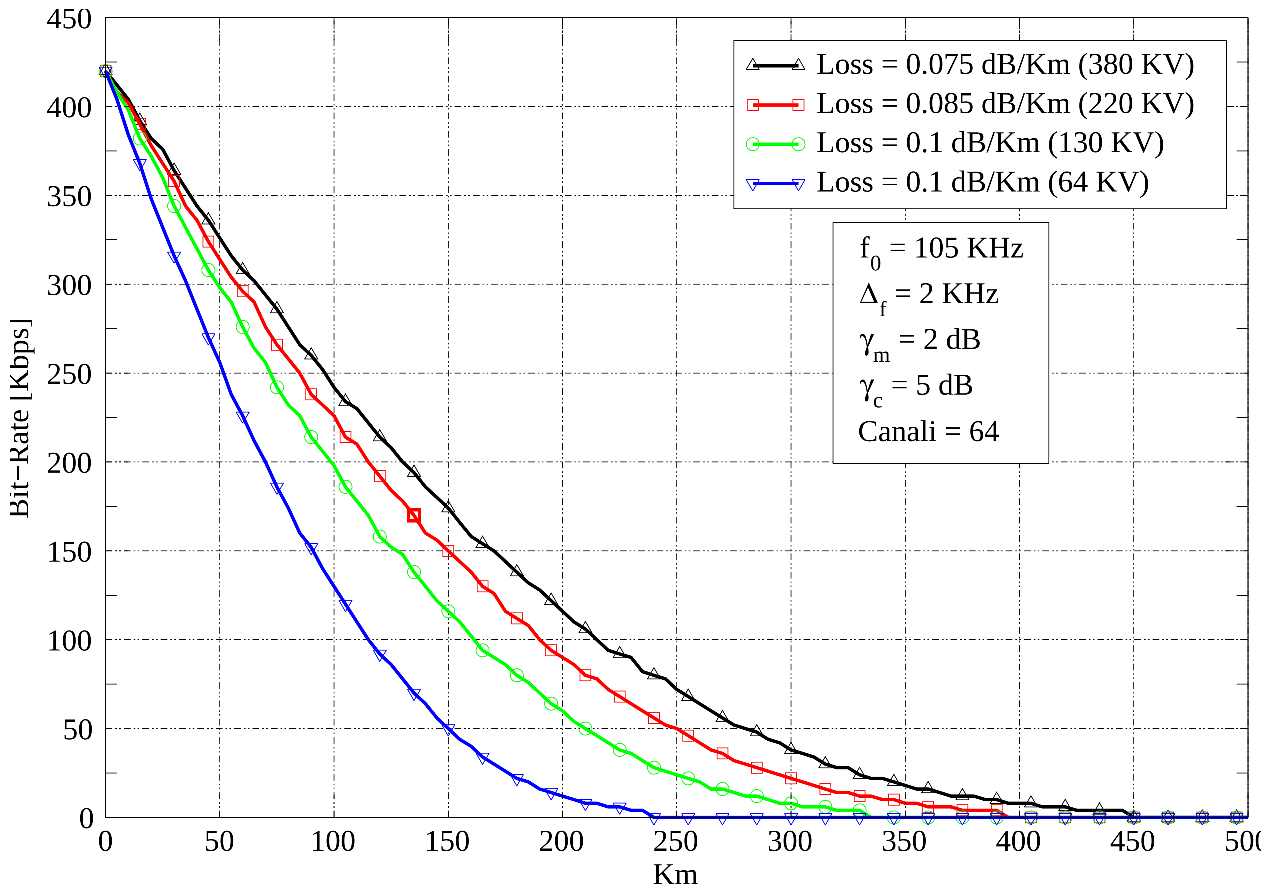


- Nel caso peggiore, la massima distanza percorribile con una sola portante è 320 Km.

Water Filling: terzo canale

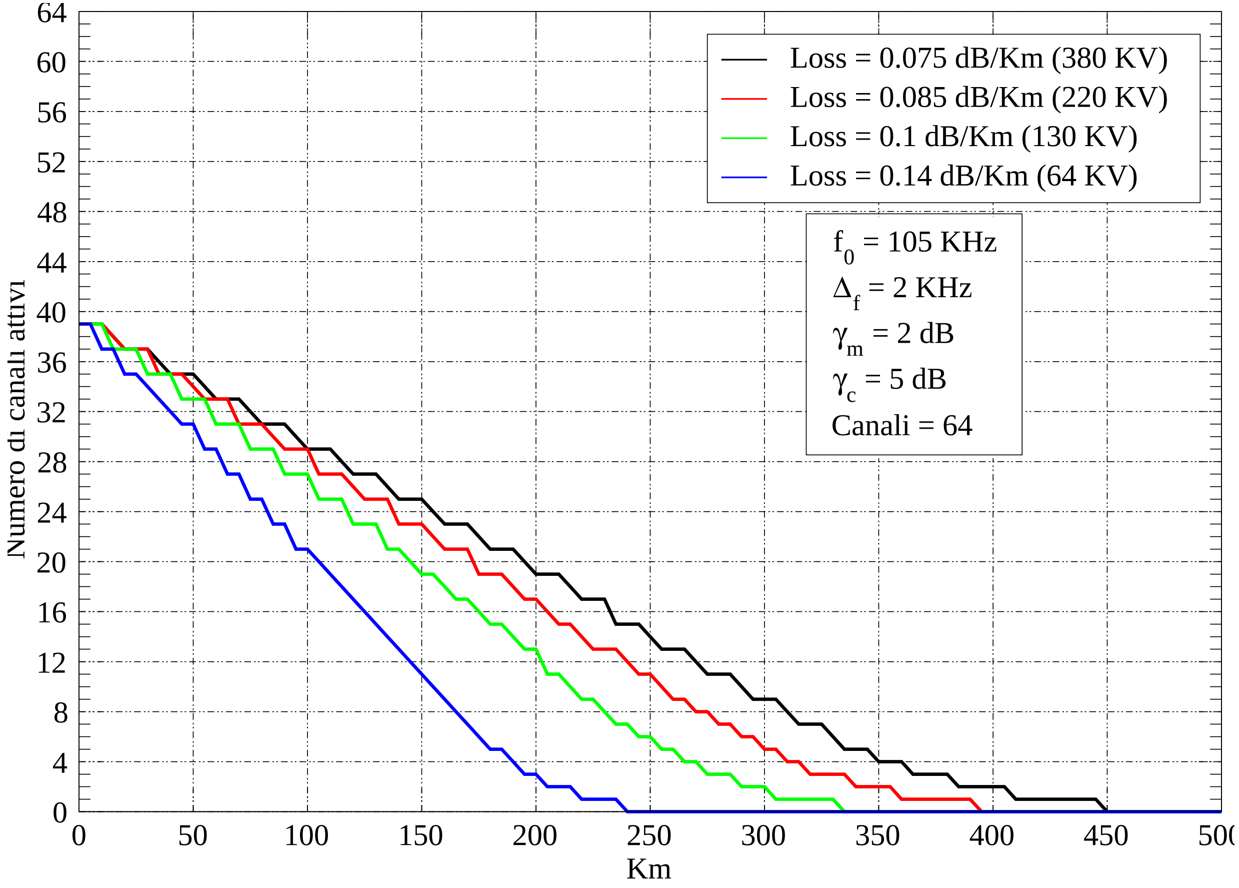


Water Filling: Bit-rate vs. attenuazione (3)



- Si è supposto una attenuazione costante e indipendente dal modo di propagazione e dal tipo di accoppiamento.

Water Filling: Canali attivi vs. attenuazione (3)



- Nel caso peggiore, la massima distanza percorribile con una sola portante è 240 Km.

Cenni alle prestazioni

- Il segnale ricevuto può essere scritto come

$$\tilde{z}(t) = \tilde{s}(t) + \tilde{n}(t) \tag{16}$$

con $\tilde{n}(t)$ processo di rumore gaussiano bianco complesso con densità spettrale di potenza bilatera pari a $2N_0$.

- Considerando l'intervallo $[mT_s, (m+1)T_s]$ e campionando a frequenza $\frac{N}{T_s}$, si ha che

$$\tilde{z}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_m^{(k)} W_N^{kn} + \tilde{n}(n) \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{17}$$

dove $\tilde{n}(n)$ sono campioni di un processo AWGN con varianza $\sigma_n^2 = 2N_0 \frac{B}{N}$, pari alla potenza del processo di rumore in ogni canale

CENNI ALLE PRESTAZIONI

- Sull' i-mo canale all'uscita del blocco FFT si ha

$$s_i = a_m^{(i)} + \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{n}_k W_N^{ki}. \tag{18}$$

- Il campione di rumore $r_i = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{n}_k W_N^{ki}$, essendo combinazione di variabili aleatorie gaussiane, è ancora una v.a. gaussiana a media nulla e varianza

$$\sigma_{r_i}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_n^2 \left| W_N^{ki} \right|^2 = N\sigma_n^2. \tag{19}$$

- Da quanto sopra ottenuto si nota che è possibile applicare i risultati ottenuti per trasmissione mono-canale, avendo l'accortezza di usare come potenza di rumore quella del singolo canale.

Cenni alle prestazioni

- Supponendo che tutti gli N canali abbiano caratteristiche identiche (identico rapporto tra l'energia media per bit e la potenza di rumore) e che i flussi di dati siano indipendenti da canale a canale, la probabilità d'errore per bit totale è

$$P_b = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} P_{b_k} = P_{b_k}. \tag{20}$$

- Dalla (20) si osserva che la prestazione, in termini di probabilità d'errore, risulta pari a quella che si avrebbe con una trasmissione mono-canale (che utilizzi ovviamente la stessa banda B)
- Quindi, anche se gli spettri dei vari canali si sovrappongono, sfruttando la loro ortogonalità le prestazioni non vengono peggiorate.

Cenni alle prestazioni