



LA TECNICA DI TRASMISSIONE OFDM

Ing. Riccardo Pighi

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università degli Studi di Parma

Parma, Venerdì 23 Gennaio 2004



SOMMARIO DELLA PRESENTAZIONE

1. OFDM: introduzione
 - 1.1. Gli spettri FDM e OFDM
2. Descrizione analitica della tecnica OFDM
 - 2.1. Schema a blocchi OFDM teorico
 - 2.2. Schema a blocchi con DFT
3. L'intervallo di guardia
4. Il prefisso ciclico
5. Cenni alle prestazioni

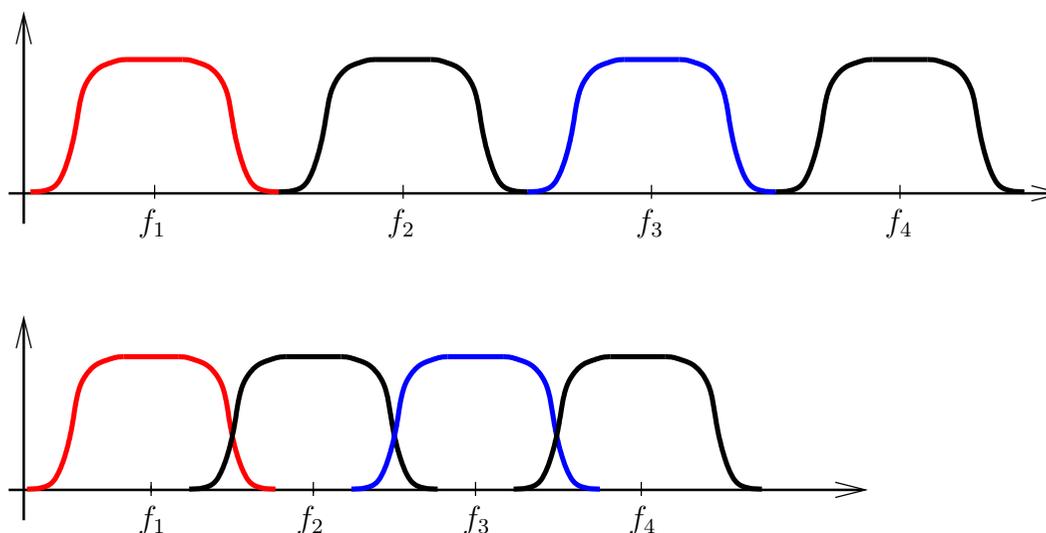


OFDM: INTRODUZIONE

- Nella trasmissione parallela di dati, la banda di frequenza disponibile è generalmente suddivisa in molti canali
- La modulazione avviene tra le varie portanti in modo **indipendente**
- I vari canali occupano bande relativamente piccole, quindi meno sensibili agli effetti della distorsione dei canali selettivi in frequenza e con rumore impulsivo
- Allo scopo di eliminare l'interferenza intercanale, gli spettri dei sottocanali non devono sovrapporsi: questo però non consente un utilizzo efficiente della banda disponibile
- La sovrapposizione spettrale può essere permessa a patto di sfruttare relazioni di **ortogonalità** tra i canali



GLI SPETTRI FDM E OFDM



- Nel primo caso si parla di FDM (Frequency Division Multiplexing)
- Nel secondo caso si parla di
 - MCM (Multicarrier Modulation)
 - OFDM (Orthogonally Frequency Division Multiplexing)



DESCRIZIONE ANALITICA DELLA TECNICA OFDM

- Un segnale OFDM consiste di N sottoportanti equispaziate in frequenza di una quantità Δf .
- La banda totale B è suddivisa in N sottocanali che vengono resi ortogonali
- L'intervallo di segnalazione è

$$T_s = \frac{1}{\Delta f}$$

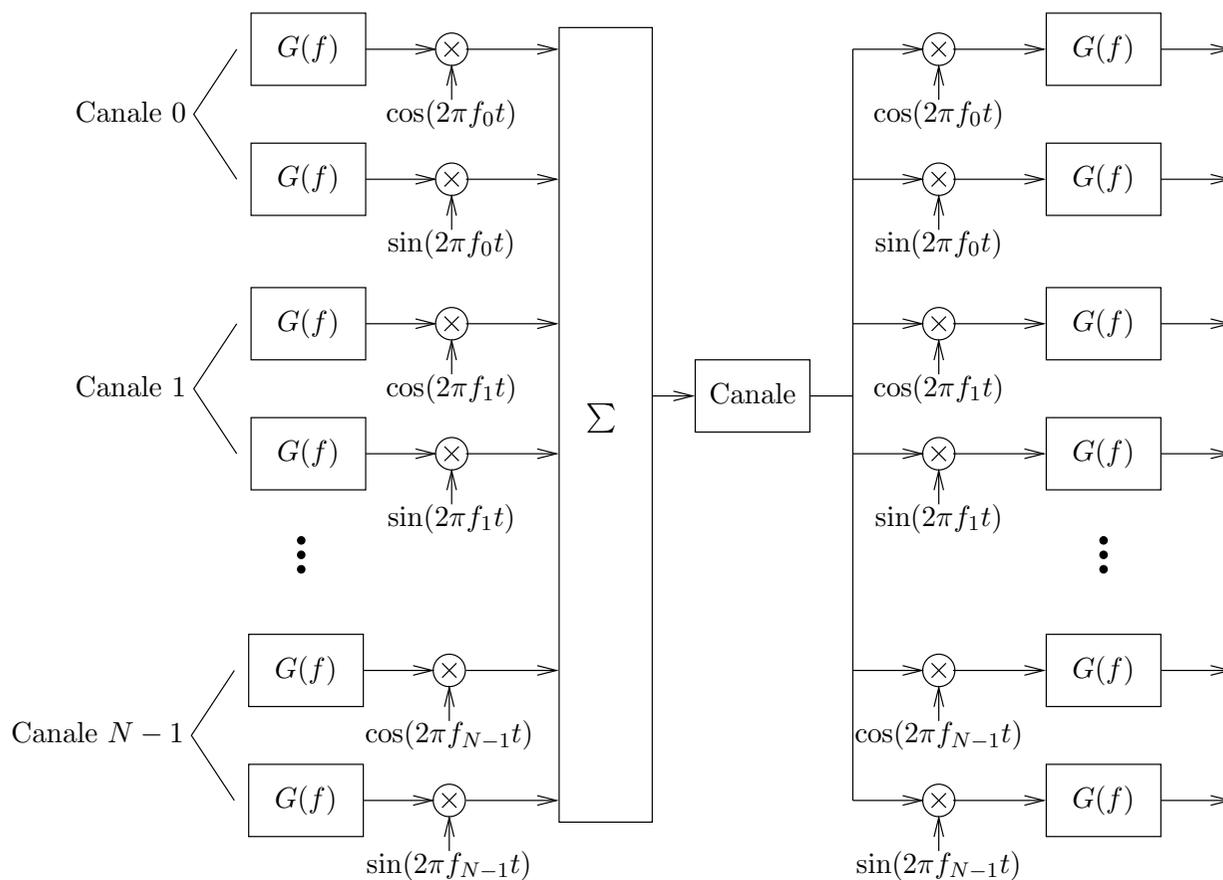
- Le portanti, rispetto alla portante di riferimento f_0 , sono individuate dalla relazione

$$f_k = f_0 + k\Delta f \quad (1)$$

con $k = 1, \dots, N - 1$.



SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM





SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (1)

- I filtri $G(f)$ sono identici e tali che $G^2(f)$ soddisfi la condizione di Nyquist per l'assenza di interferenza intersimbolica (**ISI**, *Inter-Symbol Interference*) agli istanti multipli di T_s , cioè

$$g(iT_s) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \neq 0. \end{cases}$$

- Il segnale in uscita dal modulatore può essere espresso nella forma

$$s(t) = \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_n^{(k)} g(t - nT_s) e^{j2\pi f_k t} \right\} \quad (2)$$

in cui $a_n^{(k)} = i_n^{(k)} + jq_n^{(k)}$, dove $i_n^{(k)}$ è il simbolo assegnato alla componente in fase del canale k all'istante n , mentre $q_n^{(k)}$ è il simbolo assegnato alla componente in quadratura del canale k -mo all'istante n .

SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (2)

- La (2) può essere riscritta nel seguente modo

$$s(t) = \Re\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (3)$$

dove $\tilde{s}(t)$ è l'equivalente passa-basso di $s(t)$ e può essere espresso nella forma

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_n^{(k)} g(t - nT_s) e^{j2\pi k \Delta f t}. \quad (4)$$

- La condizione che deve essere soddisfatta affinché due canali distinti (l ed m) siano ortogonali è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(t)e^{j2\pi f_l t}}_{\text{impulso del canale } l} \underbrace{g(t - iT_s)e^{j2\pi f_m t}}_{\text{impulso del canale } m} dt = 0 \quad , \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \quad (5)$$

per ogni coppia f_l, f_m che soddisfano la (1).



SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (3)

- Gli impulsi $g(t)$ devono essere progettati per garantire assenza di ISI e per eliminare la possibile interferenza Intercanale (**ICI**, *Inter-Channel Interference*)
- Si dimostra che le condizioni
 - $|G(f)|$ simmetrico rispetto ad $f = 0$
 - $\arg[G(f)]$ combinazione lineare di una funzione periodica di periodo $2\Delta f$ ed una componente di tipo lineare, cioè

$$\arg[G(f)] = \alpha f + \psi(f)$$

permettono una trasmissione senza ISI e ICI.

- Impulsi che soddisfano tali vincoli sono gli impulsi con spettro a radice di coseno rialzato con qualsiasi fattore di roll-off.
- Il sistema richiede un **elevato grado di sincronizzazione**.

SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM

- Semplificazione. Considerando un solo intervallo di segnalazione, il segnale $\tilde{s}(t)$ assume la forma

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_0^{(k)} g(t) e^{j2\pi k \Delta f t}. \quad (6)$$

- Se si campiona il segnale $\tilde{s}(t)$ N volte nell'intervallo T_s , si ha

$$\tilde{s}\left(l \frac{T_s}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} a_0^{(k)} g\left(l \frac{T_s}{N}\right) e^{j2\pi k \Delta f l \frac{T_s}{N}} \quad l = 0, \dots, N - 1; \quad (7)$$

e ricordando che $\Delta f = \frac{1}{T_s}$, la (7) diviene

$$\tilde{s}\left(l \frac{T_s}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} a_0^{(k)} W_N^{kl} \left[g\left(l \frac{T_s}{N}\right) \right] \quad l = 0, \dots, N - 1 \quad (8)$$

con $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$.



SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (1)

- La trasformata discreta di Fourier inversa permette di riottenere la sequenza $x(k)$ partendo dalla sua trasformata discreta $X(k)$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) W_N^{nl}. \quad (9)$$

- Posto $b_0^{(l)} = \sum_{k=0}^{N-1} a_0^{(k)} W_N^{kl}$, si vede che esso coincide a meno di un fattore $\frac{1}{N}$, col campione l -esimo della trasformata discreta di Fourier inversa della sequenza $\{a_0^{(0)}, \dots, a_0^{(N-1)}\}$.
- Il segnale trasmesso diviene quindi

$$\tilde{s} \left(l \frac{T_s}{N} \right) = b_0^{(l)} g \left(l \frac{T_s}{N} \right) \quad l = 0, \dots, N - 1 \quad (10)$$

con $\{b_0^{(k)}\} = IDFT[\{a_0^{(k)}\}]$.



SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (2)

- Se $g(t)$ è limitato nell'intervallo $[0, T_s]$ ($g(t) = 0 \quad t \notin [0, T_s]$), la rappresentazione (10) può essere estesa ad ogni intervallo di segnalazione

$$\tilde{s} \left(m \frac{T_s}{N} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^{(l)} g \left(l \frac{T_s}{N} - nT_s \right) \quad (11)$$

con

- $m = nN + l$
- $l = 0, \dots, N - 1$
- $n = 0, 1, \dots$

- Con queste assunzioni, lo schema di riferimento per un sistema di trasmissione OFDM è dato da

SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (3)

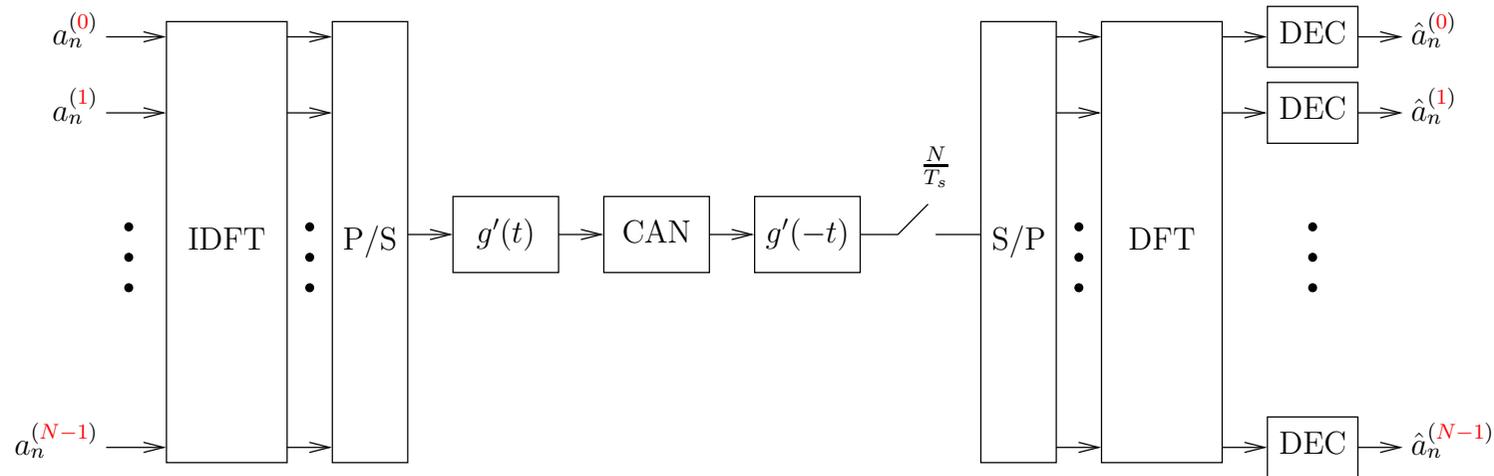


Figure 1: Sistema OFDM utilizzando la DFT

- Nel caso in cui $g(t)$ sia a banda limitata l'estensione della rappresentazione (11) sembra non essere più valida per la possibile presenza di ISI agli istanti $m\frac{T_s}{N}$, per cui non si potrebbe usare la trasformata discreta di Fourier. Tale estensione risulta invece possibile grazie al seguente teorema.



SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (4)

Teorema *Il sistema di figura 1 risulta equivalente in termini di spettro di potenza a quello ad elevata complessità con i filtri dimensionati come indicato e se l'impulso $g'(t)$ è dimensionato in modo tale che il suo spettro $G'(f)$ di potenza soddisfi*

$$|G'(f)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| G \left(f - \frac{k}{T_s} \right) \right|^2 .$$

In entrambe i casi all'ingresso dei decisori si ottengono dei campioni che, per quanto riguarda la parte di segnale sono uguali, mentre per quanto riguarda le componenti di rumore sono statisticamente equivalenti.



SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (5)

- Nello schema di figura 1 sorgono dei problemi se si usa un impulso $g(t)$ di tipo radice a coseno rialzato con fattore di roll-off α .
- Con tale scelta l'impulso $g'(t)$ risulta un impulso a radice di coseno rialzato con **fattore di roll-off**

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{N}$$

e **banda**

$$\frac{N + \alpha}{T_s}$$

- Se N cresce α_1 tende a diventare molto piccolo, per cui si avrebbe un filtro non realizzabile fisicamente.



SCHEMA DI TRASMISSIONE OFDM (6)

- Si sceglie allora di utilizzare un roll-off maggiore, con l'effetto indesiderato di avere i canali alle estremità attenuati
- Per ovviare a questo problema tali canali vengono soppressi assegnando ai relativi $a_n^{(k)}$ il valore 0.
- Il numero ($2p$) di canali da sopprimere dipende dal fattore di roll-off secondo la seguente relazione

$$2p = N\alpha,$$

per cui si ha che $a_n^{(k)} = 0$ per $k = 0, \dots, p - 1$ e per $k = N - p - 1, \dots, N - 1$.



L'INTERVALLO DI GUARDIA

- I sistemi radio OFDM sono caratterizzati dal fenomeno dei cammini multipli che introducono ISI.
- Per mitigare tale effetto, si è aggiunto un intervallo di guardia Δ in ogni trasmissione
- Il tempo totale di simbolo risulta quindi essere

$$T = \Delta + T_s$$

- Durante tale intervallo di guardia viene trasmesso un prefisso che consiste in una estensione ciclica dei simboli di canale in uscita dal blocco IFFT

$$\underbrace{b_n^{(N-N_1)}, b_n^{(N-N_1+1)}, \dots, b_n^{(N-1)}}_{\text{prefisso}} \quad | \quad \underbrace{b_n^{(0)}, b_n^{(1)}, \dots, b_n^{(N-1)}}_{\text{simboli}}$$

- Tale prefisso viene poi scartato al ricevitore



L'INTERVALLO DI GUARDIA (1)

- L'introduzione dell'intervallo di guardia con Δ maggiore della durata τ_{max} della risposta all'impulso del canale $h(t)$, serve a combattere l'ISI tra i simboli OFDM.
- Riprendendo la (4), possiamo scrivere

$$\tilde{y}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_n^{(k)} v_k [t - n(T_s + \Delta)] \quad (12)$$

dove $v_k(t) = g(t)e^{j2\pi k\Delta ft} * h(t)$.

- Supponendo che $g(t)$ abbia durata T_s , $v_k(t)$ ha durata $T_s + \tau_{max} \leq T_s + \Delta$. Questo fa sì che l'impulso $v_k [t - (n - 1)(T_s + \Delta)]$ si sovrapponga a $v_k [t - n(T_s + \Delta)]$ nell'intervallo di guardia, intervallo che verrà poi scartato al ricevitore.



PREFISSO CICLICO

- L'utilizzo di un prefisso ciclico serve a rendere la convoluzione tra il segnale trasmesso e la risposta all'impulso del canale $h(t)$ equivalente alla convoluzione circolare più adatta alla DFT.
- Si dimostra che l'introduzione del prefisso ciclico semplifica la costruzione di un eventuale equalizzatore.
- Se $H(f)$ è la funzione di trasferimento del canale ed il numero di portanti è elevato, $H(f)$ diventa virtualmente non selettiva in ogni singola portante.
- Se H_k è il valore di $H(f)$ nel k -esimo canale, all'uscita del blocco FFT, i campioni di segnale sono $a_k H_k$.
- I coefficienti $\{\alpha_j\}_{j=0}^{N-1}$ dell'equalizzatore possono essere determinati, per esempio, utilizzando il criterio dello zero-forcing

$$\alpha_k = \frac{1}{H_k}$$



PREFISSO CICLICO (1)

- L'aggiunta del prefisso ciclico diminuisce la velocità di trasmissione e aumenta la banda necessaria
- Un prefisso di N_1 simboli comporta un'espansione di banda di un fattore $\frac{N_1}{N}$.
- Nelle applicazioni pratiche si cerca quindi di scegliere il prefisso in funzione della risposta impulsiva del canale cercando, tuttavia, di mantenere l'espansione di banda al di sotto del 20-30%.



CENNI ALLE PRESTAZIONI

- Il segnale ricevuto può essere scritto come

$$\tilde{z}(t) = \tilde{s}(t) + \tilde{n}(t) \quad (13)$$

con $\tilde{n}(t)$ processo di rumore gaussiano bianco complesso con densità spettrale di potenza bilaterale pari a $2N_0$.

- Considerando l'intervallo $[mT_s, (m+1)T_s]$ e campionando a frequenza $\frac{N}{T_s}$, si ha che

$$\tilde{z}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_m^{(k)} W_N^{kn} + \tilde{n}(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (14)$$

dove $\tilde{n}(n)$ sono campioni di un processo AWGN con varianza $\sigma_n^2 = 2N_0 \frac{B}{N}$, pari alla potenza del processo di rumore in ogni canale



CENNI ALLE PRESTAZIONI (1)

- Sull' i -mo canale all'uscita del blocco FFT si ha

$$s_i = a_m^{(i)} + \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{n}_k W_N^{ki}. \quad (15)$$

- Il campione di rumore $r_i = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{n}_k W_N^{ki}$, essendo combinazione di variabili aleatorie gaussiane, è ancora una v.a. gaussiana a media nulla e varianza

$$\sigma_{r_i}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_n^2 |W_N^{ki}|^2 = N\sigma_n^2. \quad (16)$$

- Da quanto sopra ottenuto si nota che è possibile applicare i risultati ottenuti per trasmissione mono-canale, avendo l'accortezza di usare come potenza di rumore quella del singolo canale.



CENNI ALLE PRESTAZIONI (2)

- Supponendo che tutti gli N canali abbiano caratteristiche identiche (identico rapporto tra l'energia media per bit e la potenza di rumore) e che i flussi di dati siano indipendenti da canale a canale, la probabilità d'errore per bit totale è

$$P_b = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} P_{b_k} = P_{b_k}. \quad (17)$$

- Dalla (17) si osserva che la prestazione, in termini di probabilità d'errore, risulta pari a quella che si avrebbe con una trasmissione mono-canale (che utilizzi ovviamente la stessa banda B)
- Quindi, anche se gli spettri dei vari canali si sovrappongono, sfruttando la loro ortogonalità le prestazioni non vengono peggiorate.