COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Soluzione esame del 10/05/04

ESERCIZIO 1. I segnali in uscita ai 3 modulatori risultano essere

$$\begin{aligned} v_1(t) &= A_{c_1}\cos\left[2\pi f_1\, t + 2\pi f_\Delta \int^t x_1(\tau)d\,\tau\right] \\ v_2(t) &= A_{c_2}\cos\left[2\pi f_2\, t + \phi_\Delta x_2(t)\right] \\ v_3(t) &= A_{c_3}x_3(t)\cos(2\pi f_3 t) + A_{c_3}\hat{x}_3(t)\sin(2\pi f_3 t) \end{aligned}$$

In particolare per il segnale FM, l'indice di deviazione D risulta essere

$$D = \frac{f_\Delta}{W_1} = \frac{10^4}{2000} = 5\,,$$

mentre per il segnale modulato PM a banda stretta, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} v_2(t) &= A_{c_2}\cos\left[2\pi f_2\, t + \phi_\Delta x_2(t)\right] \\ &= A_{c_2}\cos(2\pi f_2 t)\cos[\phi_\Delta x_2(t)] - A_{c_2}\sin(2\pi f_2 t)\sin[\phi_\Delta x_2(t)] \\ &= A_{c_2}\cos(2\pi f_2 t) - A_{c_2}\phi_\Delta x_2(t)\sin(2\pi f_2 t)\,. \end{aligned}$$

Il segnale complessivo trasmesso sul canale risulta quindi essere

$$x_c(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)\,.$$

Gli schemi a blocchi dei modulatori sono essenzialmente quelli presentati nel libro di testo. La banda del segnale modulato FM $v_1(t)$ risulta essere

$$B_1 = 2W_1(D+2) = 28 \text{ KHz}$$

per cui, indicando come in figura 1 gli spettri dei segnali modulanti $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$, possiamo ricavare l'occupazione spettrale del segnale complessivo $x_c(t)$ come in figura 2.

Per minimizzare la banda occupata dal segnale trasmesso $x_c(t)$ basta porre

$$\begin{aligned} f_3 &= B_3 = 4 \text{ KHz} \\ f_2 &= B_3 + \frac{B_2}{2} = 7 \text{ KHz} \\ f_1 &= f_2 + \frac{B_2}{2} + \frac{B_1}{2} = 24 \text{ KHz} \end{aligned}$$

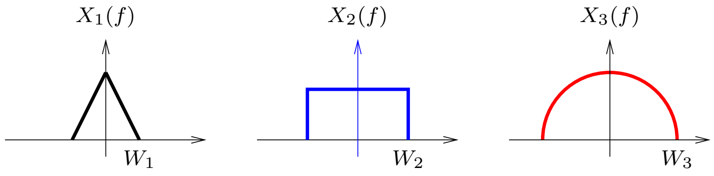

Figure 1: Spettri dei segnali modulanti.

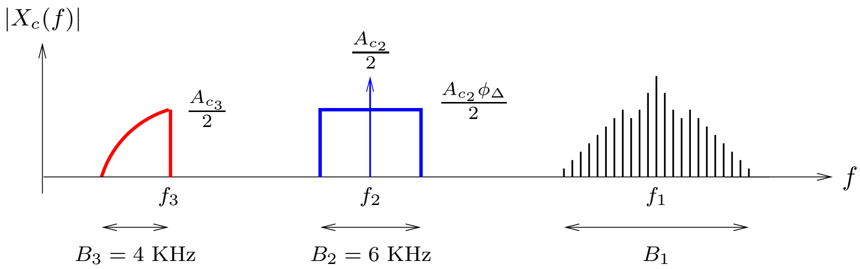

Figure 2: Spettro del segnale modulato $x_c(t)$, presentato per $f \geq 0$.

per cui la banda complessivamente occupata risulta essere $B_{TOT} = 38$ KHz. In figura 3 è riportato lo spettro del segnale $x_c(t)$ ottenuto con questi valori di frequenze portanti.

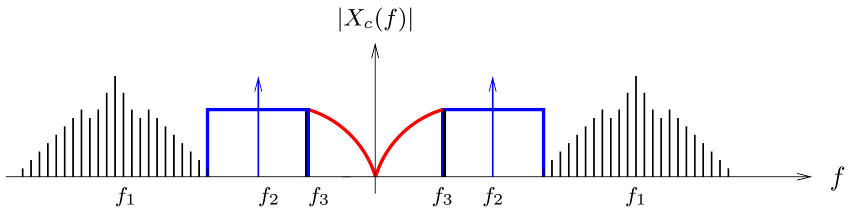

Figure 3: Spettro del segnale $x_c(t)$ con minima banda occupata.

ESERCIZIO 2. Il ricevitore ottimo risulta essere formato da un filtro di ricezione $h_R(t)$ adattato all'impulso ricevuto, quindi all'impulso $p(t)$. La convoluzione tra l'impulso di trasmissione e quello al ricevitore è quindi un impulso di Nyquist $g_N(t)$ con spettro a coseno rialzato con $\alpha = 0.2$. Supponendo di campionare agli istanti $t = kT$, siamo in una situazione di assenza di interferenza intersimbolica, per cui il decisore lavorerà con un decisiore a soglia. Supponendo che $g_N(0) = 1$, allora la soglia sarà 0. Per tale ricevitore quindi, il campione di segnale all'uscita dal campionatore risulta essere

$$r_k = a_k + n_k$$

dove n_k è una variabile casuale gaussiana, a valor medio nullo e varianza $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} g_N(0)$. Calcoliamo quindi la probabilità di errata decisione: abbiamo, sfruttando la simmetria del problema

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k\} &= \frac{1}{2} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1\} + \frac{1}{2} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} \\ &= P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} &= P\{r_k > 0 | a_k = -1\} = P\{-1 + n_k > 0 | a_k = -1\} \\ &= P\{n_k > 1\} = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = 3,16 \cdot 10^{-5}\,. \end{aligned}$$

QUESITO 1. Consideriamo quindi una PAM binaria, la cui espressione analitica risulta essere

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

con $a_k \in \{\pm A\}$. La densità spettrale di potenza del segnale PAM risulta quindi essere

$$G(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |P(f)|^2 + (m_a/T)^2 \sum_k |P(k/T)|^2 \delta(f - k/T)\,.$$

Poiché inoltre i simboli di informazione sono a media nulla e varianza $\sigma_a^2 = A^2$, otteniamo

$$G(f) = \frac{A^2}{T} |P(f)|^2$$

dove

$$P(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\,.$$

QUESITO 2. Consideriamo quindi una 4-QAM con costellazione presentata in figura 4.

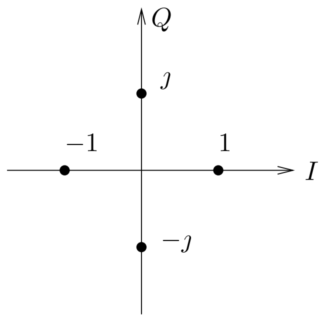

Figure 4: Costellazione 4-QAM.

Se quindi indichiamo il segnale modulato 4-QAM come

$$x_c(t) = A_c\,[x_i(t)\cos(2\pi f_c t) - x_q(t)\sin(2\pi f_c t)]$$

in figura 5 sono riportati gli andamenti delle componenti in fase

$$x_i(t) = \sum_k a_{2k}\,p(t-kT)$$

e in quadratura

$$x_q(t) = \sum_k a_{2k+1}\,p(t-kT)$$

associati alla trasmissione dei simboli $\{+1, +\jmath, -\jmath, -1\}$. Si è supposto come impulso formante un impulso NRZ.

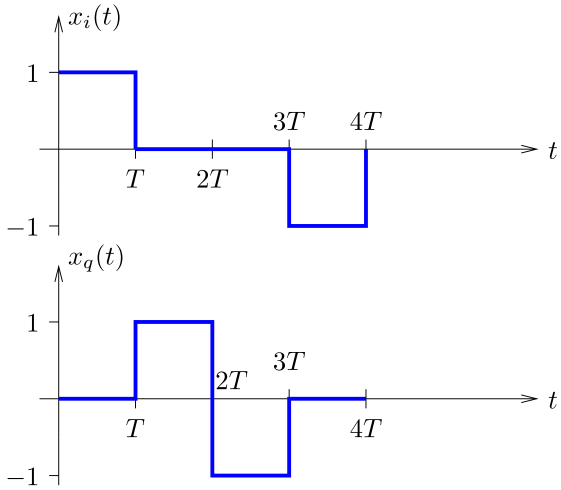

Figure 5: Andamenti nel tempo delle parti in fase ed in quadratura.