Esercizi capitolo 5 non svolti in classe

Esercizio 5.2-9

Determinare un'espressione del segnale e della sua deviazione di fase istantanea all'uscita di un filtro passa banda con risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{1}{1 + \jmath 2Q(f - f_c)/f_c} \quad f > 0$$

per un segnale di ingresso PM **a banda stretta**.

Soluzione Poiché il segnale PM è a banda stretta ($\phi_\Delta \ll 1$), possiamo scrivere il segnale PM come

$$\begin{aligned} x_c(t) &= A_c \cos[\phi_\Delta x(t)] \cos(\omega_c t) - A_c \sin[\phi_\Delta x(t)] \sin(\omega_c t) \\ &= \underbrace{A_c}_{x_i(t)} \cos(\omega_c t) - \underbrace{A_c \phi_\Delta x(t)}_{x_q(t)} \sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

da cui l'equivalente passa basso come

$$\tilde{x_c}(t) = \frac{1}{2}\left[x_i(t) + \jmath\, x_q(t)\right] = \frac{A_c}{2}\left[1 + \jmath\, \phi_\Delta x(t)\right] .$$

La trasformata di Fourier di tale segnale è

$$\tilde{X}_c(f) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(f) + \jmath\, \phi_\Delta X(f)\right] .$$

L'equivalente in banda base della risposta in frequenza del filtro passa banda risulta essere

$$\tilde{H}(f) = \frac{1}{1 + \jmath 2Q(f/f_c)}$$

per cui la trasformata di Fourier dell'uscita sarà

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(f) &= \tilde{X}_c(f) \cdot \tilde{H}(f) \\ &= \frac{A_c}{2}\left[\delta(f) + \jmath\, \phi_\Delta X(f)\right] \cdot \frac{1}{1 + \jmath 2Q(f/f_c)} \\ &= \frac{A_c}{2}\left[\delta(f) + \jmath\, \phi_\Delta \frac{X(f)}{1 + \jmath 2Q(f/f_c)}\right] . \end{aligned}$$

Antitrasformando, si ottiene

$$\tilde{y}(t) = \frac{A_c}{2}\left[1 + \jmath\,\phi_\Delta z(t)\right]$$

dove

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[Z(f)\right]$$

e

$$Z(f) = \frac{X(f)}{1 + \jmath 2Q(f/f_c)}\,.$$

Ricordando la coppia

$$\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{1 + \jmath 2\pi f} = \frac{1/a}{1 + \jmath(2\pi/a)f}$$

e ponendo $a = (\pi f_c)/Q$ si ottiene la coppia

$$\frac{\pi f_c}{Q}\,\mathrm{e}^{-(\pi f_c/Q)t}\,\mathrm{u}(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{1 + \jmath 2Q(f/f_c)}$$

da cui il segnale $z(t)$ risulta essere

$$z(t) = \frac{\pi f_c}{Q}\left[\mathrm{e}^{-\pi(f_c/Q)t}\,\mathrm{u}(t)\right] * x(t)\,.$$

Tornando in banda passante si ottiene infine

$$\begin{aligned} y(t) &= 2\mathrm{Re}\left\{\tilde{y}(t)\,e^{\jmath\omega_c t}\right\} \\ &= A_c\mathrm{Re}\left\{\left[1 + \jmath\,\phi_\Delta z(t)\right]\,e^{\jmath\omega_c t}\right\} \\ &= A_c\cos(\omega_c t) - A_c\,\phi_\Delta z(t)\sin(\omega_c t)\,. \end{aligned}$$

Si può osservare che il segnale filtrato ha espressione simile a quella del segnale di ingresso, in cui però la componente in quadratura è filtrata passa basso da un filtro con risposta all'impulso

$$\frac{\phi_\Delta \pi f_c}{Q}\mathrm{e}^{-(\pi f_c/Q)t}\,\mathrm{u}(t)\,.$$