COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova del 18/2/2009

Tempo a disposizione: 3 ore

1. E' dato il sistema di Fig. 1 dove $x_c(t) = (1 + \mu x(t)) \cos 2\pi f_c t$ è la modulazione AM di un segnale $x(t)$. Il messaggio $x(t)$ è di banda B, potenza $S_x = 4$ V^2 e tale che $|x(t)| \leq 1$.

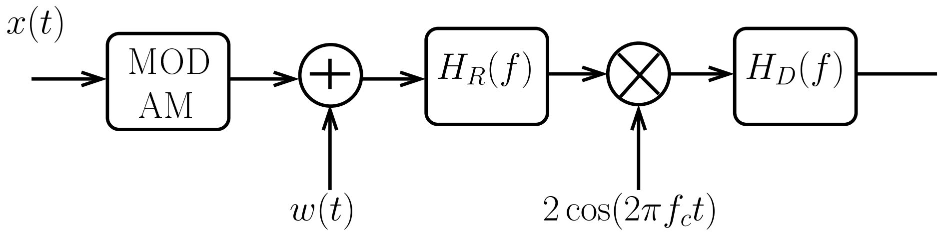

Figura 1: Sistema analogico.

Il filtro BPF, di simmetria hermitiana, ha risposta in frequenza $H_R(f)$ per $f > 0$ pari a:

$$H_R(f) = \begin{cases} j2\pi(f - f_c) & |f - f_c| \leq B \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$$

$w(t)$ è un rumore a media nulla e densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$. Il filtro $H_D(f)$ è passa basso di banda B. Si calcoli:

(a) il massimo valore di μ in modo che $x_c(t)$ sia AM e con $\langle x_c^2(t) \rangle \leq 1$ V^2;

(b) il rapporto segnale rumore all'uscita supponendo $x(t) = A\cos(2\pi Bt)$;

(c) nell'ipotesi che si abbia a disposizione un filtro integratore $H_I(f) = 1/(j2\pi f)$, si giustifichi brevemente il suo impatto nel caso venga posizionato all'ingresso o all'uscita dello schema di Fig. 1.

2. Sia dato un segnale PAM $x(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$ dove $a_k = b_k + \alpha b_{k-1}$, essendo $b_k = \{\pm 1\}$ simboli indipendenti e $0 < \alpha < 1$. L'impulso di supporto è $p(t) = \operatorname{sinc}(t/T)$.

(a) calcolare la densità spettrale di potenza di $x(t)$;

(b) calcolare la probabilità di errore di b_k nell'ipotesi di usare un ricevitore composto da un filtro adattato a $p(t)$, un campionatore e un decisore a soglia di decisione nulla.

Risultati e soluzione: *http://www.tlc.unipr.it/people/colavolpe*

oppure

http://www.tlc.unipr.it/people/serena

1. **Soluzione:**

    (a) Il segnale affinché sia AM deve avere $\mu < 1$. Tuttavia il vincolo sulla massima potenza è più stringente. Infatti, la potenza del segnale AM è legata a quella di $x(t)$ da:

    $$S_c = \langle x_c^2(t) \rangle = \frac{1+\mu^2 S_x}{2}$$

    quindi $S_c \leq 1\ \mathrm{V}^2$ richiede $\mu \leq 0.5$.

    (b) Il filtro $H_R(f)$ è un derivatore nella banda del segnale, dotato di equivalente passabasso $H_{lp}(f) = j2\pi f$ (notazione Carlson) per $|f| < B$. L'equivalente passabasso del segnale trasmesso, risulta:

    $$x_{lp}(t) = \frac{1+\mu x(t)}{2}\,.$$

    $x_{lp}(t)$ all'uscita di $H_R(f)$ fornisce il segnale:

    $$Y_{lp}(f) = X_{lp}(f)H_{lp}(f) = \frac{\delta(f)+\mu X(f)}{2}\, j2\pi f \overset{\mathscr{F}^{-1}}{\leftrightarrow} \frac{\mu}{2}\frac{dx}{dt}\,.$$

    Quindi il segnale passabanda dopo $H_R(f)$ è $y(t) = 2\mathrm{Re}\left\{y_{lp}(t)e^{j2\pi f_c t}\right\} = \mu \frac{dx}{dt}\cos(2\pi f_c t)$. Inserendo anche il rumore:

    $$\begin{aligned} y(t) &= \mu\frac{dx}{dt}\cos(2\pi f_c t) + \\ &\quad n_i(t)\cos(2\pi f_c t) - n_q(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

    quindi un segnale con parte in fase $\mu\frac{dx}{dt} + n_i(t)$ e parte in quadratura $n_q(t)$. Il filtro $H_R(f)$ è seguito da un ricevitore sincrono che estrae la parte in fase, quindi all'uscita del circuito si ha:

    $$y_o(t) = -2\pi B\mu A\sin(2\pi B t) + n_i(t)\,.$$

    La potenza di segnale è $S = 4\pi^2 B^2\mu^2 A^2/2$. il rumore $n(t)$ presenta densità spettrale di potenza $G_n(f) = \frac{N_0}{2}|H_R(f)|^2$. Essendo:

    $$G_{n_i}(f) = \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{sgn}(f+f_c)\right]G_n(f+f_c) + \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{sgn}(f-f_c)\right]G_n(f-f_c)$$

    risulta:

    $$N = \langle n_i^2(t)\rangle = \int \frac{N_0}{2}\left(2\cdot|j2\pi f|^2\right)|H_D(f)|^2\,df\,.$$

    Svolgendo i calcoli:

    $$N = \frac{N_0}{2}\int_{-B}^{B} 8\pi^2 f^2\,df = \frac{N_0}{2}8\pi^2 2\frac{B^3}{3}\,.$$

    Il rapporto segnale rumore è S/N:

    $$\frac{S}{N} = \frac{3}{4}\frac{A^2\mu^2}{N_0 B}\,.$$

    (c) il segnale ricevuto è la derivata di quello trasmesso, quindi integrarlo all'uscita o prima di trasmetterlo corrisponde ad effettuare una equalizzazione perfetta in ambo i casi. Così non è per il rumore, in quanto ponendo l'integratore in uscita si de-enfatizzano tutte le frequenze elevate del rumore ($|H_I(f)|^2 \propto 1/f^2$).

2. **Soluzione**:

(a) L'impulso trasmesso è

$$p(t) = \mathrm{sinc}\left(t/T\right) \overset{\mathscr{F}}{\leftrightarrow} P(f) = T\mathrm{rect}\left(fT\right) .$$

La densità spettrale di potenza ha espressione

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T}\left|P(f)\right|^2 = TW_a(f)\mathrm{rect}^2\left(fT\right)$$

dove

$$W_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m)e^{-j2\pi mfT}$$

e

$$R_a(m) = E\left\{a_{k+m}a_k\right\}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} E\left\{a_{k+m}a_k\right\} &= E\left\{\left(b_{k+m} + \alpha b_{k+m-1}\right)\left(b_k + \alpha b_{k-1}\right)\right\} \\ &= R_b(m) + \alpha R_b(m+1) + \alpha R_b(m-1) + \alpha^2 R_b(m) \end{aligned} \tag{1}$$

dove, essendo i simboli b_k indipendenti, vale:

$$R_b(m) = E\left\{b_{k+m}b_k\right\} = \begin{cases} E\{b_k^2\} & m = 0 \\ E\{b_{k+m}\}E\{b_k\} & m \neq 0 . \end{cases}$$

Con simboli $b_k = \{\pm 1\}$ risulta:

$$\begin{aligned} E\{b_k^2\} &= 1 \\ E\{b_k\} &= 0 \end{aligned}$$

quindi $R_b(m) = \delta(m)$ che inserito nella (1) fornisce:

$$R_a(m) = \left(1+\alpha^2\right)\delta(m) + \alpha\delta(m+1) + \alpha\delta(m-1)$$

e

$$W_a(f) = \left(1+\alpha^2\right) + \alpha e^{+j2\pi fT} + \alpha e^{-j2\pi fT} .$$

Pertanto la densità spettrale di potenza è

$$W_s(f) = T\left(1+\alpha^2+2\alpha\cos\left(2\pi fT\right)\right)\mathrm{rect}^2\left(fT\right) .$$

(b) Utilizzando un ricevitore ottimo $h(t) = \frac{1}{T}p(-t)$ si ottiene all'uscita:

$$y\left(t_k\right) = a_k + n_k$$

dove $a_k = b_k + \alpha b_{k-1}$ mentre n_k è un rumore gaussiano a media nulla e varianza:

$$\sigma^2 = \int \frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2}\frac{1}{T^2}\int \left|P(f)\right|^2 df = \frac{N_0}{2T} .$$

Essendo i simboli b_k indipendenti si può calcolare la probabilità di sbagliare b_k come segue:

$$\begin{aligned} P_e = \; & P_r\left\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k < 0 | b_k = +1,\, b_{k-1} = +1\right\}\frac{1}{4} + \\ & P_r\left\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k > 0 | b_k = -1,\, b_{k-1} = +1\right\}\frac{1}{4} + \\ & P_r\left\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k < 0 | b_k = +1,\, b_{k-1} = -1\right\}\frac{1}{4} + \\ & P_r\left\{b_k + \alpha b_{k-1} + n_k > 0 | b_k = -1,\, b_{k-1} = -1\right\}\frac{1}{4} . \end{aligned}$$

dove:

$$
\begin{aligned}
P_r\{1+\alpha+n_k<0\} &= Q\left(\frac{1+\alpha}{\sigma}\right)\\
P_r\{-1+\alpha+n_k>0\} &= Q\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)\\
P_r\{1-\alpha+n_k<0\} &= Q\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)\\
P_r\{-1-\alpha+n_k>0\} &= Q\left(\frac{1+\alpha}{\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

In definitiva, ponendo $E_b = T$, si ha:

$$
P_e = \frac{1}{2}\left(Q\left((1+\alpha)\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)+Q\left((1-\alpha)\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right).
$$