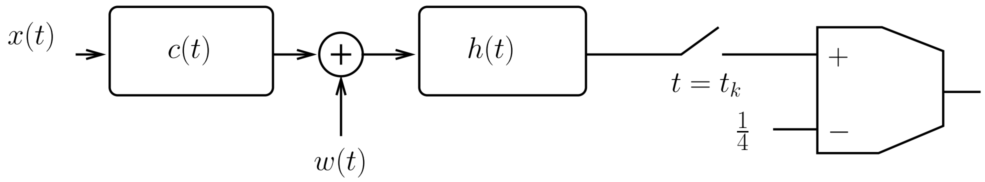
COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova del 22/01/2010
Tempo a disposizione: 2 ore



Si consideri lo schema di figura dove $x(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$ è un segnale PAM con simboli $a_k \in \{0, 1\}$, indipendenti ed equiprobabili. L'impulso di supporto è:

$$p(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{dT}} & \frac{T}{8} < t < \frac{T}{8} + dT \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $0 < d < 1$. $w(t)$ è un rumore AWGN a media nulla con densità spettrale di potenza $G_w(f) = N_0/2$. Come si vede dalla figura, dopo il campionatore il comparatore ha soglia $1/4$.

Assumendo il canale di risposta impulsiva $c(t) = \delta(t)$:

1. Calcolare l'espressione temporale del filtro $h(t)$ adattato al segnale $x(t)$, con l'accortezza di rendere $h(t)$ causale. Utilizzando tale filtro causale, si calcoli l'istante di campionamento ottimo t_k per estrarre il simbolo a_k;

2. Si dimensioni l'ampiezza di $h(t)$ in modo che il ricevitore minimizzi la probabilità di errore. Ciò si ottiene imponendo la condizione $P_r\{\text{errore}|a_k = 0\} = P_r\{\text{errore}|a_k = 1\}$;

Per i punti 3 e 4 si assuma $c(t) = \delta(t) - \alpha\delta(t - DT)$, con $\alpha < 1$, $D > 0$.

3. Si calcoli la probabilità di errore in uscita con $d = 1$, $D = 0.5$ e il filtro $h(t)$ calcolato ai punti 1 e 2;

4. Si dica (giustificandolo) se, con $dT + DT < T$ e utilizzando un filtro $h(t)$ adattato al segnale in uscita al canale, può esserci interferenza inter-simbolica al campionatore.

Soluzione

1. Il filtro adattato è $h(t) = g \cdot p(t_d - t)$ dove g è una costante e t_d un ritardo. Affinché il filtro sia causale occorre che $h(t) = 0$ per $t < 0$, quindi che $t_d > \frac{T}{8} + dT$. Per estrarre il campione a_k in maniera ottimale occorre campionare all'istante tale per cui
$$p(t - kT) \otimes h(t)|_{t=t_k} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha - kT) g p(t_d - t_k + \alpha) d\alpha$$
è massimo, ovvero a $t_k = t_d + kT$.

2. Occorre calcolare il valore di g in modo che la soglia di decisione sia a metà tra i livelli ricevuti. Con il filtro adattato il segnale campionato risulta
$$y_k = a_k \int_{-\infty}^{\infty} g p^2(t) dt + n_k = g a_k + n_k$$
dove n_k è una variabile casuale distribuita gaussiana, a media nulla, e varianza:
$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 p^2(t) dt = \frac{g^2 N_0}{2}$$
Risulta:
$$\begin{aligned} P_r\{\text{errore}|a_k = 0\} &= P_r\left\{n_k > \frac{1}{4}\right\} = Q\left(\sqrt{\frac{1}{16\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{8g^2N_0}}\right) \\ P_r\{\text{errore}|a_k = 1\} &= P_r\left\{g + n_k < \frac{1}{4}\right\} = Q\left(\sqrt{\frac{\left(g - \frac{1}{4}\right)^2}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\left(g - \frac{1}{4}\right)^2}{g^2 N_0}}\right) \end{aligned}$$
le due probabilità sono uguali quando $g = \frac{1}{2}$.

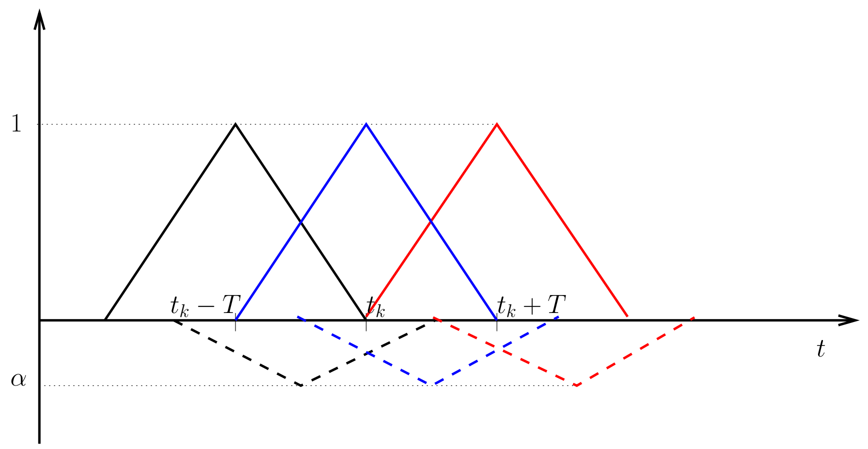


Figura 1: contributi di ISI a $t = t_k$ in presenza di eco del canale.

3. Con tale scelta di d e D si hanno due contributi di interferenza inter-simbolica all'istante di campionamento, come mostrato in Fig. 1. Con la definizione $f(t) \triangleq p(t) \otimes h(t)$ il segnale campionato risulta:
$$\begin{aligned} y(t_k) &= \sum_k a_k f(t_k - kT) - \alpha \sum a_k f(t_k - kT - \frac{T}{2}) + n(t_k) = \\ &= a_k f(t_d) - \alpha a_k f\left(t_d - \frac{T}{2}\right) - \alpha a_{k-1} f\left(t_d + \frac{T}{2}\right) + n_k \\ &= g a_k - g\frac{\alpha}{2}(a_k + a_{k-1}) + n_k \end{aligned}$$

Di conseguenza la probabilità di errore è

$$\begin{aligned}
P_r\{\text{errore}\} &= P_r\left\{ga_k - \frac{\alpha}{2}g\left(a_k + a_{k-1}\right) + n_k < \frac{1}{4}|a_k = 1\right\}\frac{1}{2} \\
&+ P_r\left\{ga_k - \frac{\alpha}{2}g\left(a_k + a_{k-1}\right) + n_k > \frac{1}{4}|a_k = 0\right\}\frac{1}{2} \\
&= P_r\left\{g - g\alpha + n_k < \frac{1}{4}\right\}\frac{1}{4} + P_r\left\{g - g\frac{\alpha}{2} + n_k < \frac{1}{4}\right\}\frac{1}{4} \\
&+ P_r\left\{-\frac{\alpha}{2}g + n_k > \frac{1}{4}\right\}\frac{1}{4} + P_r\left\{n_k > \frac{1}{4}\right\}\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left\{Q\left(\frac{g\left(1-\alpha\right) - \frac{1}{4}}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{g\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{4}}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2}g}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{\frac{1}{4}}{\sigma}\right)\right\}
\end{aligned}$$

4. Non è presente interferenza inter-simbolica in quanto l'impulso di supporto si estende per una durata $\tau = dT + DT$ inferiore al tempo di simbolo T, come si vede dalla Fig. 2. Di conseguenza, la sua convoluzione con il filtro adattato (di uguale estensione temporale) non può fornire segnale a $t_d \pm T$.

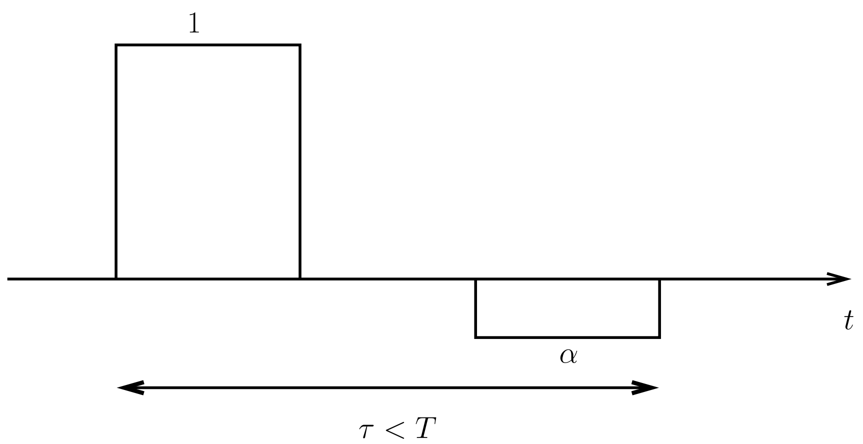


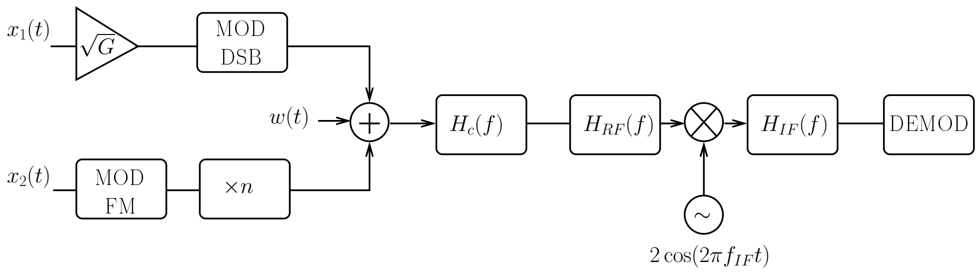
Figura 2: Impulso di supporto con eco.

COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova del 22/01/2010
Tempo a disposizione: 2 ore

Si consideri lo schema di figura dove:



$x_{1,2}(t)$ sono due messaggi ciascuno di banda $B = 10$ [kHz] e potenza $S_x = 1$ [V^2]; il modulatore DSB genera un segnale con frequenza di portante $f_{c1} = 550 \cdot n$ [kHz], dove n è un fattore moltiplicativo; il modulatore FM genera un segnale FM con frequenza di portante $f_{c2} = 705$ [kHz] e deviazione di frequenza $f_\Delta = 150$ [kHz]; il blocco "$\times n$" è un moltiplicatore di frequenza dello stesso fattore n di cui sopra; $w(t)$ è un rumore a media nulla e densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$; $H_c(f)$ è un canale passa banda ideale di banda $B_c = 2.2$ [MHz] e centrato alla frequenza $f_c = 700 \cdot n$ [kHz]; i filtri $H_{RF}(f)$ e $H_{IF}(f)$ sono passa banda ideali; il blocco DEMOD è un demodulatore ideale DSB o FM a seconda del segnale che si vuole ricevere.

1. Calcolare il minimo valore n (intero) affinché la trasmissione sia possibile;
2. Commentare la differenza tra un moltiplicatore di frequenza e un convertitore di frequenza (domanda di teoria);
3. Si dica, giustificandolo, se nello schema di figura con $f_{IF} = 250 \cdot n$ [kHz] ed $n = 7$ la presenza del filtro $H_{RF}(f)$ è necessaria;
4. Calcolare il valore di G in [dB] tale per cui il rapporto segnale-rumore con il demodulatore per $x_1(t)$ sia uguale al rapporto segnale-rumore con il demodulatore per $x_2(t)$. Si assuma le portanti a f_{c1}, f_{c2} di pari ampiezza A_c.

Soluzione

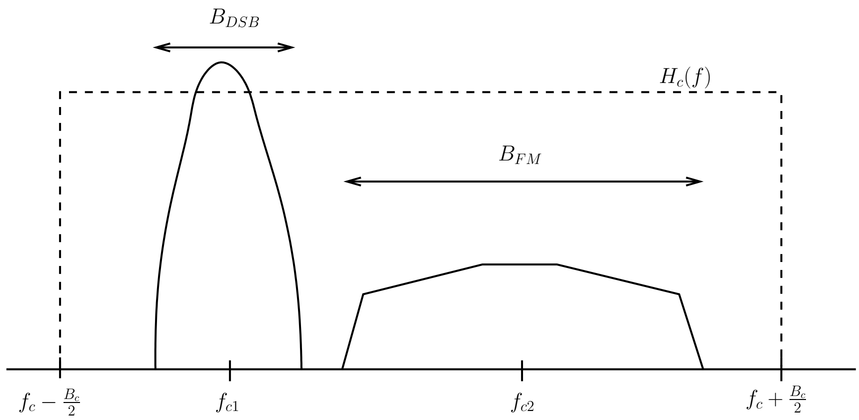


Figura 3: Spettri dei segnali.

1. All'ingresso del canale i segnali di informazione sono:

$$\begin{aligned} x_{DSB}(t) &= A_{c1} x_1(t) \cos 2\pi n f_{c1} t \\ x_{FM}(t) &= A_{c2} \cos\left(2\pi n f_{c2} t + 2\pi n f_\Delta \int x_2(\lambda) d\lambda\right) \end{aligned}$$

   $X_{DSB}(f) = \mathscr{F}\{x_{DSB}(t)\}$ è di banda $B_{DSB} = 2B$ attorno f_{c1} mentre $X_{FM}(f) = \mathscr{F}\{x_{FM}(t)\}$ è di banda $B_{FM} = 2(nf_\Delta + B)$ attorno f_{c2}. La trasmissione è possibile se tali segnali non si sovrappongono in frequenza ed entrano nella banda del canale $H_c(f)$. Tali condizioni diventano:

$$\begin{aligned} f_{c1} - B &\geq f_c - \frac{B_c}{2} \\ f_{c1} + B &\leq f_{c2} - (nf_\Delta + B) \\ f_{c2} + (nf_\Delta + B) &\leq f_c + \frac{B_c}{2} \end{aligned}$$

   come rappresentato dalla Fig. 3. Sostituendo:

$$\begin{aligned} n550 - 10 &\geq n705 - 1100 \\ n550 + 10 &\leq n705 - n150 - 10 \\ n705 + n150 + 10 &\leq n700 + 1100 \end{aligned}$$

   quindi:

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{1090}{155} = 7.03 \\ n &\geq \frac{20}{5} = 4 \\ n &\leq \frac{1090}{155} = 7.03 \end{aligned}$$

   per cui si sceglie $n = 4$.

2. Domanda di teoria. Un moltiplicatore di frequenza di un fattore $\times n$ moltiplica la frequenza istantanea del segnale di un fattore n per cui, in particolare, ne allarga la banda (come visto al punto 1). Un convertitore di frequenza trasla la trasformata di Fourier del segnale nel dominio della frequenza lasciando inalterata la banda.

3. Il ricevitore ha una struttura da ricevitore super-eterodina, dove il filtro RF serve a rigettare la frequenza immagine. Con le specifiche della domanda, la frequenza immagine si trova $2f_{IF} = 500 \cdot n = 3.5$ MHz distante dalla frequenza centrale del canale che si vuole ricevere. Essendo tale frequenza ampiamente al di fuori della banda del canale, sia nel caso DSB che nel caso FM, il filtro RF non è necessario in quanto è il canale stesso a rigettare la frequenza immagine.

4. Con un demodulatore ideale la DSB riceve il segnale:

$$y(t) = A_c\sqrt{G}x(t) + n_i(t)$$

con $n_i(t)$ parte in fase del rumore. L'SNR è pari a:

$$SNR_{DSB} = \frac{A_c^2 S_x G}{2N_0 B}$$

La FM fornisce:

$$SNR_{FM} = 3D^2 S_x \frac{A_c^2}{2N_0 B}$$

per cui gli SNR sono uguali quando $G = 3D^2$. Con $n = 4$ risulta

$$G = 10\log_{10}\left(3D^2\right) = 40.3 \quad \text{[dB]}$$