COMUNICAZIONI ELETTRICHE A

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni

Prova del 23/06/2010 - Tempo a disposizione: 3 ore

1. Sia dato il seguente segnale FM:

$$x_c(t) = \cos\left(2\pi f_c t + \cos^2(t)\right)$$

   Sapendo che la frequenza centrale è f_c e che la deviazione di frequenza è $f_\Delta = 10$ kHz, determinare il messaggio trasmesso $x(t)$.

2. Un segnale $x(t)$ di banda 10 kHz e potenza $S_x = 1$ V^2 viene trasmesso in due canali. Nel primo si utilizza la modulazione DSB con $x_{DSB}(t) = 4x(t)\cos(2\pi f_{DSB} t)$, nel secondo la modulazione FM con frequenza centrale f_{FM} e con $f_\Delta = 200$ kHz. I segnali vengono ricevuti da opportuni ricevitori operanti in presenza di rumore additivo indipendente e con densità spettrale di potenza bi-latera pari a $N_0/2 = 10^{-8}$ V^2/Hz.

   (a) Sapendo che il segnale FM e quello DSB hanno la stessa potenza, calcolare il rapporto segnale-rumore di pre-rivelazione del segnale FM;

   (b) Calcolare il rapporto segnale-rumore di ricezione del segnale DSB e di quello FM.

3. Si consideri la trasmissione, su un canale con rumore additivo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza bilatera $N_0/2$, di un segnale PAM avente impulso formante $p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}(t/T)$, dove T è l'intervallo di segnalazione, e simboli $a_k \in \{-1, \alpha\}$ equiprobabili ed indipendenti.

   (a) Si calcoli la densità spettrale di potenza del segnale trasmesso e se ne disegni il grafico.

   (b) Si determini la struttura del ricevitore ottimo.

   (c) Si ottimizzi α in modo da minimizzare la probabilità d'errore in funzione del rapporto E_b/N_0, avendo indicato con E_b l'energia media per bit.

1. Il segnale FM risulta:

$$x_c(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)d\lambda\right)$$

per cui:

$$2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)d\lambda = \cos^2 t$$

ovvero:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi f_\Delta}\frac{d\cos^2 t}{dt} = -\frac{1}{\pi f_\Delta}\cos t \sin t$$

2.

 (a) Il segnale DSB è del tipo:

$$x_{DSB}(t) = A_c x(t)\cos(2\pi f_{DSB} t)$$

 per cui $A_c = 4$. La condizione di uguale potenza si traduce in uguali ampiezza sia per il segnale FM che per quello DSB, essendo $S_x = 1$ V^2. La banda del segnale FM è:

$$B_{FM} = 2(f_\Delta + B) = 420 \quad kHz$$

 mentre il rapporto segnale rumore di pre-rivelazione è:

$$SNR_{pre} = \frac{A_c^2}{2N_0 B_{FM}} = 32.8 \quad dB$$

 (b) Il rapporto segnale rumore DSB è:

$$SNR_{DSB} = \frac{S_R}{N_0 B} = \frac{A_c^2 S_x}{2N_0 B} = 49 \quad dB$$

 mentre quello FM è:

$$SNR_{FM} = 3\left(\frac{f_\Delta}{B}\right)^2 S_x \frac{S_R}{N_0 B} = 3\left(\frac{f_\Delta}{B}\right)^2 S_x \frac{A_c^2}{2N_0 B} = 86 \quad dB$$

 per cui la perdita è 86-49=37 dB.

3. Si tratta di una trasmissione PAM con impulso avente energia $E_p = 1$.

 (a) La densità spettrale di potenza del segnale trasmesso è

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T}|P(f)|^2 = W_a(f)\mathrm{sinc}^2(fT)$$

 dove

$$W_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m)e^{-j2\pi m f T}.$$

 Poiché

$$R_a(m) = E\{a_{k+m}a_k\} = \begin{cases} E\{a_k^2\} = \frac{\alpha^2+1}{2} & \text{per}\, m = 0 \\ E\{a_k\}E\{a_{k+m}\} = \frac{(\alpha-1)^2}{4} & \text{per}\, m \neq 0 \end{cases} = \frac{(\alpha-1)^2}{4} + \frac{(\alpha+1)^2}{4}\delta(m)$$

 è

$$W_a(f) = \frac{(\alpha+1)^2}{4} + \frac{(\alpha-1)^2}{4}\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

 e quindi

$$\begin{aligned} W_s(f) &= \frac{(\alpha+1)^2}{4}\mathrm{sinc}^2(fT) + \frac{(\alpha-1)^2}{4}\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}^2(m)\delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \\ &= \frac{(\alpha+1)^2}{4}\mathrm{sinc}^2(fT) + \frac{(\alpha-1)^2}{4}\frac{1}{T}\delta(f) \end{aligned}$$

 il cui grafico è mostrato in Fig. 1.

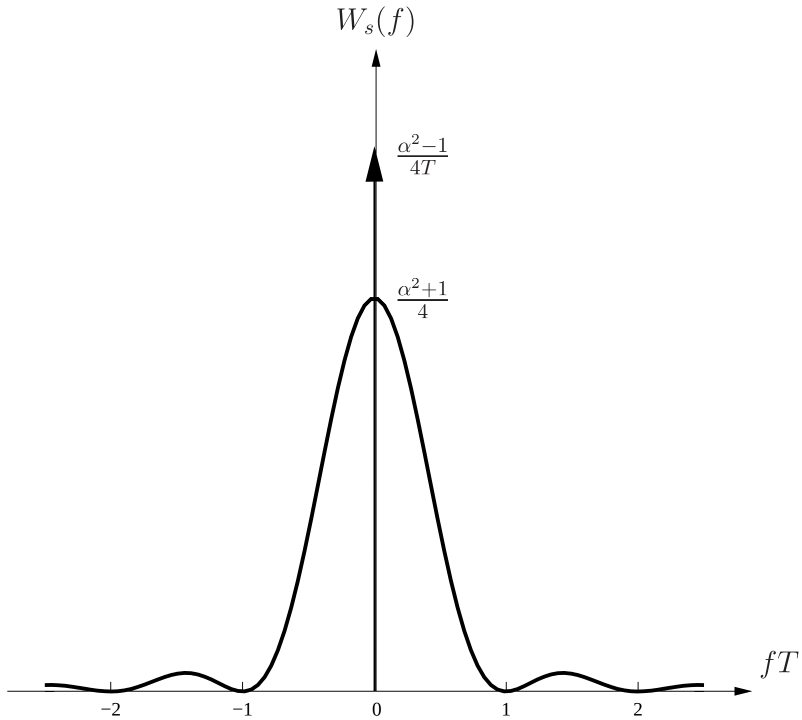

Figura 1:

(b) L'impulso $p(t)$ ha durata limitata pari ad un intervallo di segnalazione. Non dà quindi luogo ad interferenza intersimbolica. Il ricevitore ottimo è quindi costituito da un filtro adattato (lo assumeremo con risposta impulsiva $p(-t)$), un campionatore agli istanti kT e da un decisore a soglia con soglia. Il campione all'istante kT dell'uscita del filtro adattato si può esprimere come

$$x_k = E_p a_k + w_k = a_k + w_k$$

dove w_k è una variabile casuale gaussiana a media nulla con varianza $\sigma^2 = N_0/2$. In assenza di rumore il campione assume quindi valore -1 o α a seconda del simbolo trasmesso. La soglia dovrà quindi essere scelta a metà tra i due valori (essendo i simboli equiprobabili) e cioè sarà pari a $\frac{\alpha-1}{2}$.

(c) La probabilità d'errore sul bit risulta

$$P_b = P(\mathscr{E}) = \frac{1}{2}P(\mathscr{E}|a_k=-1) + \frac{1}{2}P(\mathscr{E}|a_k=\alpha)$$

in cui

$$\begin{aligned} P(\mathscr{E}|a_k=-1) &= P\{x_k > \frac{\alpha-1}{2}|a_k=-1\} = P\{-1+w_k > \frac{\alpha-1}{2}\} \\ &= P\{w_k > \frac{\alpha+1}{2}\} = \mathrm{Q}\left(\frac{\alpha+1}{2\sigma}\right) \end{aligned}$$

Per simmetria è poi

$$P(\mathscr{E}|a_k=-1) = P(\mathscr{E}|a_k=\alpha)$$

e quindi risulta

$$P_b = \mathrm{Q}\left(\frac{\alpha+1}{2\sigma}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{2N_0}}\right).$$

A seconda della trasmissione del simbolo -1 o del simbolo α, sul canale avremo l'impulso $-p(t)$ o l'impulso $\alpha p(t)$. L'energia media per bit sarà dunque

$$E_b = \frac{1}{2}E_p + \frac{1}{2}\alpha^2 E_p = \frac{\alpha^2+1}{2}$$

e quindi

$$P_b = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right) .$$

Poiché la funzione $\mathrm{Q}(x)$ è monotona decrescente, il minimo si ottiene quando il suo argomento è massimo. La funzione

$$\frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha^2+1}}$$

assume il massimo per $\alpha = 1$ e tale massimo vale $\sqrt{2}$.