

## Comunicazioni elettriche A

*Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e*

*Ingegneria delle Telecomunicazioni*

### Prova finale del 19/1/2004

Tempo a disposizione: 2 h.

Nel sistema di trasmissione per segnali numerici mostrato in Fig. 1, il segnale  $s(t)$  è del tipo:

$$s(t) = \sum_i a_i \delta(t - iT).$$

I simboli  $a_i$  sono indipendenti e possono assumere i valori  $\{\pm 1\}$  con uguale probabilità, l'intervallo di segnalazione è  $T = 1 \mu s$ , ed il rumore  $w(t)$  è gaussiano bianco con densità spettrale di potenza  $N_0/2$  con  $N_0 = 0.125 \text{ V}^2/\text{Hz}$ .

1. Supponendo che il canale  $C(f)$  si possa considerare passa basso ideale nella banda  $B = 700 \text{ kHz}$ , si dimensionino i filtri  $H_T(f)$  e  $H_R(f)$  in modo da massimizzare il rapporto segnale-rumore al campionatore e che l'impulso al campionatore abbia spettro a coseno rialzato con banda  $B$ .
2. Si calcoli la probabilità d'errore per il ricevitore dimensionato al punto precedente.
3. Con i filtri  $H_T(f)$  e  $H_R(f)$  così dimensionati, si determini il valore degli interferenti quando il canale ha risposta in frequenza  $C(f) = 0.8e^{-j1.4\pi f/B} + 0.4 \cos(1.4\pi f/B)$ .
4. Si calcoli l'errore quadratico medio  $J = E\{(x_k - a_{k-1})^2\}$ .
5. Nell'ipotesi di utilizzare ancora un decisore a soglia, si calcoli la probabilità d'errore in presenza di ISI.
6. Si dimensionino un equalizzatore a 2 prese secondo il criterio del minimo errore quadratico medio (indicando con  $y_k$  il campione all'uscita dell'equalizzatore, si assuma come funzionale da minimizzare  $J_e = E\{(y_k - a_{k-1})^2\}$ ).

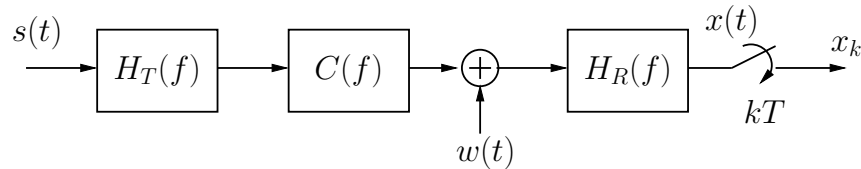


Figura 1:

**Soluzione.**

1. I filtri  $H_T(f)$  e  $H_R(f)$  devono essere scelti in modo tale che sia  $H_R(f) = H_T^*(f)$  (filtro adattato) e che  $H_T(f)H_R(f) = G_N(f)$  dove  $G_N(f)$  è una funzione che soddisfa la condizione di Nyquist di assenza di ISI. Pertanto  $H_T(f)$  e  $H_R(f)$  possono essere scelti con risposta in ampiezza a radice di coseno rialzato con *roll-off* tale che sia

$$\frac{1 + \alpha}{2T} = B \Rightarrow \alpha = 2BT - 1 = 0.4$$

2. Assumendo  $g_N(0) = 1$ , il campione all'uscita del filtro adattato ha espressione

$$x_k = a_k + n_k$$

dove  $n_k$  è una variabile casuale gaussiana a media nulla e con varianza

$$\sigma^2 = E\{n_k^2\} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_N(f) df = \frac{N_0}{2} g_N(0) = \frac{N_0}{2}.$$

La probabilità d'errore sul bit può quindi calcolarsi come

$$P_b = P\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \frac{1}{2}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = 1\} + \frac{1}{2}P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\}$$

dove

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} &= P\{x_k > 0 | a_k = -1\} P\{-1 + n_k > 0\} = P\{n_k > 1\} \\ &= Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

e analogamente

$$P\{\hat{a}_k \neq a_k | a_k = -1\} = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right).$$

Pertanto

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = Q(4) \simeq 3.17 \cdot 10^{-5}.$$

3. La risposta in frequenza del canale può essere espressa come

$$C(f) = 0.8e^{-j2\pi fT} + 0.2e^{-j2\pi fT} + 0.2e^{j2\pi fT} = e^{-j2\pi fT} + 0.2e^{j2\pi fT}$$

la cui antitrasformata è

$$c(t) = \delta(t - T) + 0.2\delta(t + T).$$

La spettro  $G(f)$  dell'impulso dopo il filtro adattato sarà quindi

$$G(f) = H_T(f)C(f)H_R(f) = G_N(f)C(f)$$

la cui antitrasformata è

$$g(t) = g_N(t - T) + 0.2g_N(t + T) .$$

Si ha quindi  $g_k = \delta_{k-1} + 0.2\delta_{k+1}$  ed il campione all'uscita del filtro  $H_R(f)$  può essere espresso come

$$x_k = a_{k-1} + 0.2a_{k+1} + n_k .$$

Si ha pertanto un solo interferente di peso 0.2.

4. L'errore quadratico medio può calcolarsi come

$$J = E\{(x_k - a_{k-1})^2\} = E\{(0.2a_{k+1} + n_k)^2\} = 0.04 + \sigma^2 = 0.1025$$

avendo sfruttato l'indipendenza tra i simboli e il rumore ed il fatto che  $E\{a_k^2\} = 1$ .

5. In queste nuove condizioni, la probabilità d'errore può calcolarsi come

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{4}P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = 1, a_{k+1} = 1\} \\ &+ \frac{1}{4}P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = 1, a_{k+1} = -1\} \\ &+ \frac{1}{4}P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = -1, a_{k+1} = 1\} \\ &+ \frac{1}{4}P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = -1, a_{k+1} = -1\} \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = 1, a_{k+1} = 1\} &= Q\left(\frac{1.2}{\sigma}\right) \\ P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = 1, a_{k+1} = -1\} &= Q\left(\frac{0.8}{\sigma}\right) \\ P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = -1, a_{k+1} = 1\} &= Q\left(\frac{0.8}{\sigma}\right) \\ P\{\hat{a}_{k-1} \neq a_{k-1} | a_{k-1} = -1, a_{k+1} = -1\} &= Q\left(\frac{1.2}{\sigma}\right) . \end{aligned}$$

Pertanto

$$P_b = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1.2}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{0.8}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}Q(4.8) + \frac{1}{2}Q(3.2) \simeq \frac{1}{2}Q(3.2) \simeq 3.4 \cdot 10^{-4} .$$

6. All'uscita di un equalizzatore a 2 prese, si ha

$$y(t) = \sum_i a_i q(t - iT) + n_e(t)$$

dove, indicando con  $c_0$  e  $c_1$  i pesi dell'equalizzatore,

$$\begin{aligned} q(t) &= c_0 g(t) + c_1 g(t - T) \\ n_e(t) &= c_0 n(t) + c_1 n(t - T) \end{aligned}$$

e quindi, essendo  $q_k = c_0 g_k + c_1 g_{k-1} = c_0 \delta_{k-1} + 0.2c_0 \delta_{k+1} + c_1 \delta_{k-2} + 0.2c_1 \delta_k$ , il campione all'uscita dell'equalizzatore può essere espresso come

$$y_k = 0.2c_0 a_{k+1} + 0.2c_1 a_k + c_0 a_{k-1} + c_1 a_{k-2} + n_{ek}.$$

Il funzionale da minimizzare è

$$J(c_0, c_1) = E\{(y_k - a_{k-1})^2\} = E\{(0.2c_0 a_{k+1} + 0.2c_1 a_k + (c_0 - 1)a_{k-1} + c_1 a_{k-2} + n_{ek})^2\}$$

e sfruttando l'indipendenza dei simboli e di simboli e rumore ed inoltre sapendo che  $E\{a_k^2\} = 1$ ,

$$J(c_0, c_1) = 0.04c_0^2 + 0.04c_1^2 + (c_0 - 1)^2 + c_1^2 + E\{n_{ek}^2\}$$

Il valore quadratico medio del rumore dopo l'equalizzatore si calcola semplicemente come

$$\begin{aligned} E\{n_{ek}^2\} &= E\{(c_0 n_k + c_1 n_{k-1})^2\} = c_0^2 E\{n_k^2\} + c_1^2 E\{n_{k-1}^2\} + 2c_0 c_1 E\{n_k n_{k-1}\} \\ &= (c_0^2 + c_1^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

avendo sfruttato il fatto che

$$E\{n_k n_{k-1}\} = E\{n(t)n(t - T)\} = R_n(T)$$

e poiché la densità spettrale del rumore dopo il filtro  $H_R(f)$  è  $S_n(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} G_N(f)$ , antitrasformando si ha  $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} g_N(\tau)$  e quindi

$$E\{n_k n_{k-1}\} = R_n(T) = \frac{N_0}{2} g_N(\tau) = 0.$$

Il funzionale da minimizzare risulta quindi

$$J(c_0, c_1) = 0.04c_0^2 + 0.04c_1^2 + (c_0 - 1)^2 + c_1^2 + (c_0^2 + c_1^2)\sigma^2$$

e di conseguenza il sistema di equazioni da risolvere risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(c_0, c_1)}{\partial c_0} &= 2(0.04c_0 + c_0 - 1 + c_0\sigma^2) = 0 \\ \frac{\partial J(c_0, c_1)}{\partial c_1} &= 2(0.04c_1 + c_1 + c_1\sigma^2) = 0 \end{aligned}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.907 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

corrispondente ad un errore quadratico medio minimo  $J_{e,min} = 0.093$ . Pur essendo diminuito (di poco) l'errore quadratico medio con l'introduzione dell'equalizzatore, ciò non corrisponde ad un miglioramento della probabilità d'errore. Infatti, essendo nulla la seconda presa dell'equalizzatore, esso in realtà si comporta da semplice attenuatore e quindi, essendo attenuati della stessa quantità sia il segnale che il rumore, la probabilità d'errore rimarrà invariata.