Soluzioni

1) [8 pt] Due v.c. X e Y, congiuntamente continue e di cui è nota la funzione di distribuzione $F_{XY}(x,y)$, sono applicate in ingresso ad un dispositivo la cui uscita fornisce il numero N di ingressi che superano un prefissato valore di soglia γ. Pertanto N è una v.c. che può assumere solo i valori $0,1,2$. Determinare la funzione massa di probabilità $P\{N=i\}$, $i=0,..,2$ in funzione di $F_{XY}(x,y)$ e di γ.

Soluzione

Cerchiamo i valori $P\{N=0\}$, $P\{N=1\}$, $P\{N=2\}$. Osservando che $N=0$ quando nessuno degli ingressi supera la soglia, abbiamo che

$$P\{N=0\} = P\{X<\gamma, Y<\gamma\} = F_{XY}(\gamma,\gamma)$$

Invece, $N=2$ quando entrambi gli ingressi superano la soglia, quindi

$$\begin{aligned} P\{N=2\} &= P\{\gamma<X<\infty, \gamma<Y<\infty\} \\ &= 1+F_{XY}(\gamma,\gamma)-F_{XY}(\gamma,\infty)-F_{XY}(\infty,\gamma) \end{aligned}$$

Ed infine

$$\begin{aligned} P\{N=1\} &= 1-P\{N=0\}-P\{N=2\} \\ &= F_{XY}(\gamma,\infty)+F_{XY}(\infty,\gamma)-2F_{XY}(\gamma,\gamma) \end{aligned}$$

2) [8 pt] Mostrare che se due v.c. X e Y sono legate dalla relazione $Y=aX+b$, allora il loro coefficiente di correlazione è $\rho = \begin{cases} 1 & \text{se } a>0 \\ -1 & \text{se } a<0 \end{cases}$.

Soluzione

Essendo il coefficiente di correlazione uguale alla covarianza normalizzata

$$\rho = \frac{c_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

occorre calcolare la covarianza e le deviazioni standard. La covarianza può calcolarsi come

$$c_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y$$

essendo $r_{XY} = E\{XY\}$ la correlazione, e $\eta_X = E\{X\}$, $\eta_Y = E\{Y\}$ i valori medi di X e Y. Da $Y = aX + b$ segue immediatamente che

$$\begin{aligned}
r_{XY} &= E\{aX^2 + bX\} = aE\{X^2\} + b\eta_X \\
\eta_Y &= a\eta_X + b \\
\eta_X\eta_Y &= a\eta_X^2 + b\eta_X \\
c_{XY} &= aE\{X^2\} - a\eta_X^2 = a\sigma_X^2 \\
\sigma_Y^2 &= a^2\sigma_X^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_Y = |a|\sigma_X
\end{aligned}$$

e quindi

$$\rho = \frac{c_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{|a|\sigma_X^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0 \\ -1 & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

3) [9 pt] Date le v.c. $Y = \cos X$ e $Z = \sin X$, con X v.c. uniformemente distribuita in $(0, 2\pi)$, (a) si calcoli la d.d.p. di Y; (b) si stabilisca se Y e Z sono incorrelate; (c) si stabilisca se Y e Z sono indipendenti.

Soluzione

(a) Applicando il teorema fondamentale per $y = g(x)$, con $g(x) = \cos x$, si han sempre due soluzioni: $x_1 = \arccos y$ e $x_2 = 2\pi - x_1$, e poiché $g'(x) = -\sin(x) = \pm\sqrt{1-y^2}$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{f_X(\arccos y)}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{f_X(2\pi - \arccos y)}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

(b) Le v.c. Y e Z sono incorrelate se $E\{YZ\} = E\{Y\}E\{Z\}$. Essendo

$$\begin{aligned}
E\{Y\} &= E\{\cos X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, f_X(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \frac{1}{2\pi} dx = 0 \\
E\{Z\} &= E\{\sin X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, f_X(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \frac{1}{2\pi} dx = 0 \\
E\{YZ\} &= E\{\cos X \sin X\} = \frac{1}{2} E\{\sin(2X)\} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x)\frac{1}{2\pi} dx = 0
\end{aligned}$$

Y e Z sono incorrelate.

(c) Dal momento che $Y^2 + Z^2 = 1$, si ha che quando per esempio $Z = 1$, necessariamente $Y = 0$ e dunque

$$f_{Y/Z}(y/Z = 1) = \delta(y)$$

cioè la massa di probabilità di Y condizionata a $Z = 1$ è tutta concentrata in $Y = 0$.

Tuttavia se Y e Z fossero indipendenti dovrebbe essere

$$f_{Y/Z}(y/Z=1) = f_Y(y) = \frac{1/\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

che evidentemente è diversa da una delta nell'origine, dunque Y e Z non sono indipendenti.

4) [8 pt] N=10 giocatori sparano, un colpo ciascuno e scegliendo il bersaglio indipendentemente dagli altri, a M=5 bottiglie. Ciascun giocatore colpisce il bersaglio con probabilità $p = 0.1$ indipendentemente dagli altri. Si calcoli il numero medio di bottiglie colpite.

Soluzione

Detta la v.c. $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se bott. i colpita} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, allora il numero di bottiglie colpite è $C = \sum_{i=1}^{M} X_i$, e dunque $E[C] = ME\{X_i]$ poichè ogni bottiglia ha la stessa probabilità di essere colpita. Una particolare bottiglia non è colpita da uno specifico giocatore con probabilità $1-p/M$, poichè p/M è la probabilità che questo la miri e la colpisca. Quindi nessun giocatore colpisce la specifica bottiglia con probabilità $(1-p/M)^N$ essendo le azioni dei giocatori indipendenti. Quindi $P\{X_i = 0\} = (1-p/M)^N$ e dunque $E[X_i] = P\{X_i = 1\} = 1-(1-p/M)^N$. Pertanto $E[C] = M\left(1-(1-p/M)^N\right) \cong 0.91$