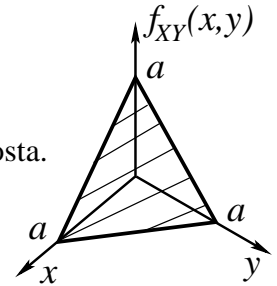


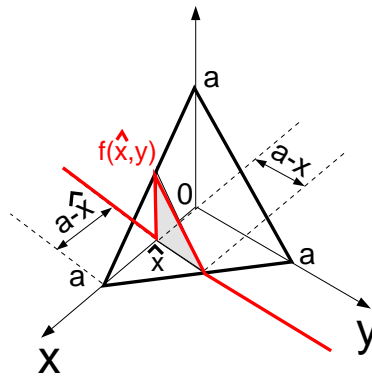
Soluzioni

1) [8 pt] Sia $f_{XY}(x,y)$ data dalla porzione di piano mostrata in figura, e nulla altrove.

- Ricavare $f_X(x)$, $f_Y(y)$ e darne il grafico; determinare il fattore a .
- Ricavare $f_{Y|X}(y|x)$. Sono X ed Y indipendenti? Giustificare la risposta.

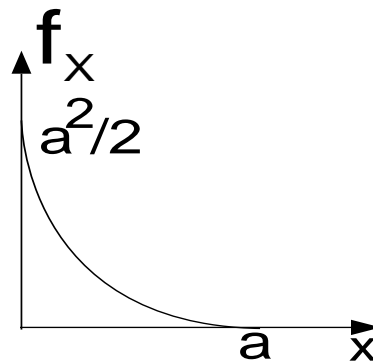


Soluzione



(a) Ricaviamo le marginali per integrazione rispetto alla variabile che non interessa: fissiamo \hat{x} e calcoliamo:

$$f_X(\hat{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\hat{x}, y) dy = \text{area sotto la curva rossa} = (a - \hat{x})^2/2 \text{ per } 0 < \hat{x} < a \text{ e nulla altrove}$$



il cui grafico è mostrato in figura. La condizione di normalizzazione impone:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^a \frac{(a-x)^2}{2} dx = \frac{a^3}{6}$$

da cui ricaviamo $a = (6)^{1/3} \cong 1.817$. Per simmetria ricaviamo che $f_Y(u) = f_X(u)$.

(b) Ora ricaviamo l'espressione analitica di f_{XY} . Fissato x , la funzione è la porzione di retta $f_{XY}(x) = -x + (a - y)$ per $0 < x < a$ (curva rossa) e dunque

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a - x - y & \text{per } 0 < x < a, 0 < y < a - x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove notiamo che, fissato x , la variabile y varia tra 0 e $a - x$ (vedi curva rossa). Infine ricaviamo

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 2 \frac{a-x-y}{(a-x)^2} & \text{per } 0 < x < a, 0 < y < a - x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ora, poiché $f_{Y|X}(y|x) \neq f_Y(y)$, concludiamo che X e Y non sono indipendenti.

- 2) [8 pt] Si consideri il seguente esperimento composito: 1) Si scelgono X palline *a caso* da un cesto che ne contiene $M = 99$; 2) Si lancia ciascuna delle X palline scelte, indipendentemente dalle altre, *a caso* in una tra $N = 50$ scatole disponibili. Si calcoli a fine esperimento il numero medio di palline per scatola.

Soluzione

Supponiamo di conoscere il valore della v. c. numero di palline $X = x$, e numeriamo tali palline da 1 a x . Fissiamo l'attenzione sulla la generica scatola j , con $1 \leq j \leq M$. Definiamo *successo sulla prova i* l'evento {la pallina i cade nella scatola j }, con $1 \leq i \leq x$. Poiché i lanci sono indipendenti, il numero di successi S_j su x prove indipendenti ci dà il numero di palline che finiscono nella scatola j , e tale numero S_j ha dunque una distribuzione binomiale di parametri x (numero di prove) e $1/N$ (probabilità di successo). È noto che tale binomiale ha media $x \cdot \frac{1}{N}$. Pertanto si ricava immediatamente

$$E[S_j | X = x] = \frac{x}{N}$$

dove notiamo che tale media è condizionata alla conoscenza della v. c. X . Dunque la media non condizionata, cioè la risposta al punto (a), è (per il teorema della media condizionata, o equivalentemente per il teorema della probabilità totale):

$$E[S_j] = E[E[S_j | X]] = E\left[\frac{X}{N}\right] = \frac{E[X]}{N} = \frac{M+1}{2N} = \frac{99+1}{2 \cdot 50} = 1 \quad (1)$$

e tale numero medio è uguale per tutte le scatole in quanto non dipende da j .

Soluzione alternativa:

Possiamo arrivare al risultato senza tirare in ballo la distribuzione binomiale di S_j come segue. Definiamo le v. c. (indicatori di successo al lancio della i -ma pallina nella scatola j fissata, cioè successo alla i -ma prova):

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{se pallina } i \text{ finisce in scatola } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Evidentemente il numero di palline che finiscono nella scatola prescelta sono $S_j = \sum_{i=1}^x I_i$ e prendendo la media (condizionata alla conoscenza del numero di palline $X = x$) otteniamo

$$E[S_j | X = x] = \sum_{i=1}^x E[I_i] = \sum_{i=1}^x \frac{1}{N} = \frac{x}{N}$$

dove abbiamo usato il fatto che $E[I_i] = 1 \cdot P\{I_i = 1\} + 0 \cdot P\{I_i = 0\} = 1 \cdot P\{\text{successo}\} = \frac{1}{N}$. Infine mediamo come in (1).

- 3) [8 pt] Un dispositivo consta di tre componenti il cui tempo di vita (espresso in ore) è schematizzabile con tre variabili casuali T_1, T_2, T_3 aventi densità di probabilità $f_{T_1}(t) = f_{T_2}(t) = f_{T_3}(t) = \frac{1}{1000} e^{-t/1000} u(t)$ ore⁻¹, ed è noto che ciascun componente si rompe indipendentemente dagli altri. Per manutenzione ordinaria, si sostituiscono ogni t_0 ore tutti e tre i componenti in modo che la probabilità di guasto del dispositivo, nell'intervallo tra due sostituzioni, sia pari a 0.1. Quanto vale t_0 ?

Soluzione

Il tempo di vita del dispositivo è la variabile casuale $T = \min(T_1, T_2, T_3)$. Dal fatto che un componente si rompe indipendentemente dagli altri, si deduce che le variabili casuali T_1, T_2, T_3 sono indipendenti e dal momento che l'evento $\{T > t\}$ è equivalente a $\{T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t\} = \{T_1 > t\}\{T_2 > t\}\{T_3 > t\}$ abbiamo che

$$P\{T > t\} = P\{T_1 > t\}P\{T_2 > t\}P\{T_3 > t\} = [1 - F_{T_i}(t)]^3$$

essendo $F_{T_i}(t) = \int_{-\infty}^t f_{T_i}(\tau) d\tau = [1 - e^{-t/1000}]u(t)$ la funzione di distribuzione delle v.c. T_i , $i = 1, 2, 3$. Quindi

$$F_T(t) = 1 - [1 - F_{T_i}(t)]^3 = 1 - e^{-3t/1000} \quad (t \geq 0).$$

Indicando con \mathcal{G} l'evento {guasto del dispositivo}, occorre determinare t_0 tale che

$$P\{\mathcal{G}\} = P\{T \leq t_0\} = F_T(t_0) = 1 - e^{-3t_0/1000} = 0.1$$

ovvero

$$t_0 = -\frac{1000}{3} \log(0.9) \cong 35.12 \text{ ore.}$$

Altra soluzione:

Ciascun componente funziona ancora per $t = t_0$ con probabilità $q = \int_{t_0}^{\infty} f_{T_i}(t) dt = e^{-t_0/1000}$ e si rompe indipendentemente dagli altri. La probabilità che il dispositivo funzioni ancora per $t = t_0$ (evento $\overline{\mathcal{G}}$) uguaglia la probabilità che si abbiano 0 rotture (successi) entro t_0 su 3 componenti (prove), essendo $p = 1 - q$ la probabilità di successo (rottura) nella singola prova. Segue che

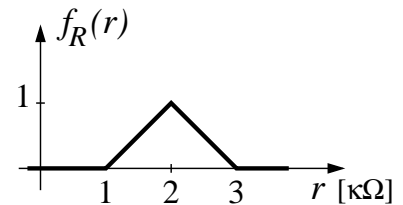
$$P\{\overline{\mathcal{G}}\} = 1 - P\{\mathcal{G}\} = 0.9 = \binom{3}{0} p^0 q^3 = e^{-3t_0/1000}$$

da cui ancora

$$t_0 = -\frac{1000}{3} \log(0.9) \cong 35.12 \text{ ore.}$$

4) [9 pt] La resistenza R di un certo tipo di resistori è una variabile casuale la cui densità di probabilità $f_R(r)$ in $[k\Omega]^{-1}$ è indicata in figura.

- Selezionando i resistori con $1.5 \leq R \leq 2.5 k\Omega$, calcolare la densità di probabilità della variabile casuale che caratterizza tali resistori.
- Prendendo a caso uno dei resistori prima selezionati, calcolare la probabilità che la sua resistenza sia minore di $2 k\Omega$.



Soluzione

a) Posto $\mathcal{A} = \{1.5 \leq R \leq 2.5 k\Omega\}$, si cerca $f_R(r|\mathcal{A})$. Dalla formula di Bayes mista abbiamo che

$$f_R(r|\mathcal{A}) = \frac{P\{\mathcal{A}|R=r\} f_R(r)}{P\{\mathcal{A}\}}$$

e dal momento che

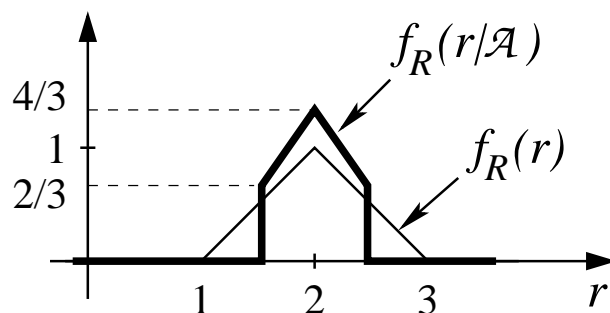
$$P\{\mathcal{A}|R=r\} = P\{1.5 \leq R \leq 2.5 | R=r\} = \begin{cases} 1 & \text{se } 1.5 \leq r \leq 2.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$P\{\mathcal{A}\} = \int_{1.5}^{2.5} f_R(r) dr = \frac{3}{4}$$

segue:

$$f_R(r|\mathcal{A}) = \begin{cases} \frac{4}{3}f_R(r) & \text{se } 1.5 \leq r \leq 2.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



b) Si può usare la $f_R(r|\mathcal{A})$ ottenendo

$$P\{R < 2 | \mathcal{A}\} = \int_{-\infty}^2 f_R(r|\mathcal{A}) dr = \int_{1.5}^2 \frac{4}{3}(r-1) dr = \frac{1}{2}$$

oppure calcolare direttamente

$$P\{R < 2 | 1.5 \leq R \leq 2.5\} = \frac{P\{R < 2, 1.5 \leq R \leq 2.5\}}{P\{1.5 \leq R \leq 2.5\}} = \frac{4}{3} P\{1.5 \leq R < 2\} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$