

Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

- 1) Un'urna contiene 3 palle bianche, 2 nere, 4 rosse. Si estraggono 4 palle a caso. Si calcoli la probabilità che (a) tra le 4 estratte ci sia esattamente 1 bianca; (b) dato che tra le 4 estratte ve ne è 1 sola rossa, la probabilità che tra le rimanenti 3 una sola sia bianca.
- 2) Date le V.A. X e Y con PDF congiunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si calcoli la CDF condizionata $F_X(a | X > Y) = P\{X \leq a | X > Y\}$, e se ne tracci il grafico.

- 3) L'altezza degli studenti maschi di un certo ateneo è una V.A. X con distribuzione Gaussiana. Se il 13.57 per cento di tali studenti sono più alti di 185 cm, e l'8.08 per cento più bassi di 160 cm, quali sono la media η_X e la deviazione standard σ_X di X ?
- 4) Un laser emette potenza unitaria costante, distribuita su un numero N di lunghezze d'onda $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. Ad ogni stante di tempo, una frazione $1 - k$ della potenza è concentrata su una determinata lunghezza d'onda (detta *di picco*), e la restante frazione k è equamente ripartita sulle restanti $N - 1$ lunghezze d'onda, con $0 \leq k \leq 1$. Il laser "sceglie" la sua lunghezza d'onda di picco *a caso* tra $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. Dunque le $P_i = \{\text{potenza su } \lambda_i\}$, per $i = 1, \dots, N$, sono V.A..
 - a) Per ogni $i \neq j$ si calcoli l'espressione analitica di $E[P_i P_j]$, e se ne dia il valore numerico per $k = 0.5$, $N = 1000$.
 - b) Si mostri che, per N grande a sufficienza (quando cioè si può approssimare $N - 1 \cong N$ e $\frac{1}{N} \ll 1$) le V.A. P_i, P_j sono incorrelate solo se $k = 1$.