Soluzioni

1) [7 pt] Un'urna contiene 3 palline nere, 4 rosse e 5 bianche. Si estraggono 2 palline a caso. i) Qual è la probabilità che almeno una delle palline sia bianca? ii) Sapendo che una delle due palline è bianca, qual è la probabilità che anche l'altra sia bianca?

Soluzione

i) Ci sono un gran numero di modi di procedere, più o meno semplici:

Metodo 1: Si pensino le palline numerate da 1 a 12. Ci sono 12 modi diversi di scegliere la prima pallina, e 11 di scegliere la seconda. Ci sono dunque $12 \cdot 11$ differenti coppie ordinate di palline, che rappresentano i punti del nostro spazio campione uniforme. Ora contiamo le coppie in cui almeno una è bianca. Contiamo prima quelle in cui la prima o entrambe sono bianche. Ci sono 5 modi diversi di scegliere la prima bianca. Scelta la prima, ci sono 11 modi di scegliere la rimanente pallina della coppia. Contiamo ora quelle in cui solo la seconda è bianca: se la prima non è bianca (12-5=7 modi diversi), ci sono 5 modi di scegliere la seconda bianca. I punti favorevoli all'evento $E = \{\text{almeno una delle palline è bianca}\}$ sono dunque $5 \cdot 11 + 7 \cdot 5 = 5 \cdot 18$. Pertanto la probabilità dell'evento cercato è $P\{E\} = \frac{5 \cdot 18}{12 \cdot 11} = \frac{15}{22} \cong 0.68$.

Metodo 2: si poteva ragionare trovando la probabilità dell'evento complementare ad E, cioè $\overline{E} = \{\text{nessuna delle palline è bianca}\}$, in cui le coppie favorevoli sono in numero pari a 12-5=7 (modi di scegliere una non-bianca al primo posto) per 11-5=6 (modi di scegliere la seconda non bianca), cioè

$$P\left\{\overline{E}\right\} = \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 11} = \frac{7}{22}$$

dove notiamo che $7/12$ è la probabilità di scegliere la prima pallina non bianca, mentre $6/11$ è la probabilità di scegliere la seconda non bianca condizionata alla scelta della prima bianca. Infine, $P\{E\} = 1 - P\left\{\overline{E}\right\} = 15/22 \cong 0.68$.

Metodo 3: Si poteva ragionare su uno spazio campione uniforme composto da coppie non ordinate, che sono in numero pari a $\binom{12}{2} = 66$. Le coppie non ordinate fatte solo da palline non bianche sono quelle scelte tra le 12-5=7 non bianche, e sono $\binom{7}{2} = 21$. Dunque

$$P\left\{\overline{E}\right\} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$$

come sopra.

Metodo 4: l'evento E si può scrivere come unione di espliciti eventi disgiunti, cosicché

$$P(E) = P\{bb\} + P\{bn\} + P\{br\} + P\{nb\} + P\{rb\}$$

dove ad esempio l'evento $\{bn\}$ significa l*a prima pallina è bianca e la seconda nera.* Come notato al metodo 2, possiamo scrivere: $P(bb) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} \cong 0.15$, $P(bn) = \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11} \cong 0.11$, $P(br) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} \cong 0.15$, $P(nb) = \frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11} \cong 0.11$, $P(rb) = \frac{4}{12}\cdot\frac{5}{11} \cong 0.15$, cosicché $P\{E\} \cong 0.68$.

ii)

Si sta qui cercando $P(bb \,|\, E)$, che si trova con Bayes:

$$P(bb \,|\, E) = \frac{P\,(bb, E)}{P\,(E)}$$

dove in base al punto precedente otteniamo $P\,(bb, E) = P(bb) = \frac{5}{33}$, poiché $A \subset E$. Pertanto

$$P(bb \,|\, E) = \frac{\frac{10}{66}}{15/22} = \frac{2}{9} \cong 0.22$$

Si noti che questo risultato è *differente* dalla probabilità che, dato che la *prima* pallina è bianca, anche la *seconda* sia bianca. Infatti quest'ultima probabilità si calcola come segue. Se la prima è bianca, rimangono 11 palline nello spazio campione ristretto dal condizionamento, di cui solo 4 sono bianche. Dunque $4/11 \cong 0.36$ è la probabilità che anche l'altra sia bianca.

2) [6 pt] Un test a risposte multiple contiene 10 domande, ciascuna con m risposte. Uno studente conosce la risposta esatta a ciascuna domanda con probabilità $p = 0.5$, indipendentemente domanda per domanda. Quando non conosce la risposta, tira a caso.

   a) Qual è la probabilità che lo studente conosca la risposta esatta ad una specifica domanda, dato che ad essa ha risposto correttamente? Si determini il minimo m affinché tale probabilità superi 0.7 .
   b) Dato che ha risposto correttamente a 7 domande su 10, qual è in media la percentuale di domande di cui effettivamente conosce la risposta?

Soluzione

a) È evidente che se uno studente risponde correttamente, ciò può essere dovuto al fatto che conosce la risposta, oppure perchè tirando a caso ha indovinato. Definiti gli eventi $C = \{\text{risposta corretta}\}$ e $K = \{\text{conosce la risposta}\}$, stiamo cercando $P\,(K \,|\, C)$. Dal teorema di Bayes:

$$P\,(K \,|\, C) = \frac{P\,(C \,|\, K)\, P\,(K)}{P\,(C \,|\, K)\, P\,(K) + P\left(C \,|\, \overline{K}\right) P\left(\overline{K}\right)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1-p)} > 0.7$$

che ci dà: $m > 2.33$, quindi scegliamo il primo intero successivo, $m = 3$.

b) Con $m = 3$ abbiamo $P(K \mid C) = 0.75$, e questa rappresenta la probabilità di successo p_s in 7 prove indipendenti. Il numero di "successi" N rappresenta il numero di domande, su 7 azzeccate, a cui lo studente risponde conoscendo la risposta corretta. La distribuzione di N è dunque binomiale con probabilità di successo p_s e 7 prove. Pertanto il numero medio di domande azzeccate di cui lo studente conosce la risposta è $\overline{N} = p_s \cdot 7$, e la percentuale (media) di domande azzeccate è

$$\frac{\overline{N}}{10} \cdot 100 = \frac{0.75 \cdot 7}{10} 100 = 52.5\,\%$$

3) [7 pt] Una V.A. X uniforme tra 0 e 2 entra in un blocco di trasformazione la cui uscita è la V.A. $Y = g(X)$. Sapendo che la densità di probabilità di Y è:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si trovi una possibile forma esplicita della funzione $g(X)$.

Soluzione

Se X' fosse uniforme tra 0 e 1, sappiamo che applicandole la funzione $g(X') = F_Y^{-1}(X')$ si otterrebbe in uscita una V.A. Y la cui funzione di distribuzione cumulativa è proprio $F_Y(y)$. Nel nostro caso si ha:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \begin{cases} 0 & \text{se}\, y < 0 \\ y^3 & \text{se}\, 0 < y < 1 \\ 1 & \text{se}\, y > 1 \end{cases}$$

Non resta che trasformare la nostra X, uniforme tra 0 e 2, in X'. Tale trasformazione, per il teorema fondamentale, è semplicemente la moltiplicazione per il fattore $\frac{1}{2}$, cioè $X' = X/2$. Quindi la trasformazione globale desiderata risulta essere $g(X) = F_Y^{-1}(X/2)$, cioè esplicitamente:

$$g(X) = \begin{cases} 0 & \text{se}\, X < 0 \\ (X/2)^{1/3} & \text{se}\, 0 < X < 2 \\ 0 & \text{se}\, X > 2 \end{cases}$$

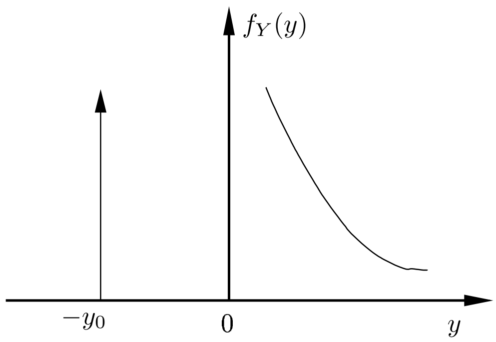
4) [7 pt] La relazione tra tensione X e corrente Y in un diodo sia data da:

$$Y = g(X) = \begin{cases} \alpha X^2 & \text{se } X \ge 0 \\ -y_0 & \text{se}\, X < 0 \end{cases}$$

con $y_0 = 2$ milliAmpere, e $\alpha = 0.5$ milliAmpere/Volt^2. Se X è una V.A. gaussiana con media nulla e varianza pari a 1 Volt^2, ricavare la densità di probabilità $f_Y(y)$ della corrente Y, tracciarne il grafico, e dire di che tipo di V.A. si tratta.

Soluzione

Si tratta di applicare il teorema fondamentale alla trasformazione $Y = g(X)$. Per $y < 0$ si ha $f_Y(y) = 0$ in quanto non ci sono soluzioni dell'equazione $y = g(x)$, tranne nel caso $y = -y_0$ in cui la funzione è piatta, ci sono cioè infinite soluzioni e dunque la densità di probabilità di Y ha una delta di Dirac piazzata in $y = -y_0$, con peso pari alla probabilità $P\{X < 0\} = 1/2$. Per $y \geq 0$ si ha invece sempre una sola soluzione $x_1 = \sqrt{y/\alpha}$ dell'equazione $y = g(x)$, mentre la derivata in x_1 vale $g'(x_1) = 2\alpha x_1 = 2\sqrt{\alpha y}$. Essendo $f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, per il teorema fondamentale abbiamo dunque:



$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{\left|g'(x_1)\right|} = \frac{e^{-y/(2\alpha)}}{2\sqrt{2\pi\alpha y}} \qquad y \geq 0$$

e la figura ne mostra il grafico. La Y è dunque una V.A. di tipo *misto.*

5) [6 pt] In un tubo catodico (per esempio quello del vostro televisore) un fascio di elettroni è focalizzato al centro dello schermo. L'intensità luminosa di una data zona dello schermo è proporzionale al numero di elettroni che vi arrivano. Si osserva che l'intensità luminosa I decresce dal centro dello schermo verso la periferia in base alla distanza r dal centro come:

$$I(r) = I_0 e^{-r/d}, \quad r \geq 0$$

dove I_0 e d sono costanti note e positive. Si determini la probabilità che un elettrone del fascio finisca entro un cerchio di raggio d centrato sullo schermo (per i calcoli si pensi lo schermo di dimensione infinita).

Soluzione

Ricordando l'interpretazione in frequenza di occorrenza della densità di probabilità di una V.A., e interpretando il flusso di elettroni come una serie di esperimenti indipendenti ed identici di lancio di elettroni contro lo schermo, concludiamo che

$I(r)$ è proporzionale alla densità di probabilità della V.A. R ={distanza del punto di arrivo dell'elettrone dal centro schermo} in ciascun esperimento base, cioè per $r \geq 0$:

$$f_R(r) = ce^{-r/d}$$

dove la costante c si trova imponendo la condizione di normalizzazione:

$$1 = \int_0^\infty f_R(r)dr = dc \int_0^\infty e^{-r/d}\frac{dr}{d} = cd \int_0^\infty e^{-x}dx = cd$$

da cui si ricava $c = 1/d$. Pertanto

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{d}e^{-r/d} & \text{se } r \geq 0 \\ 0 & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

ed R è una V.A. esponenziale negativa. Dunque la probabilità che un elettrone caschi dentro il cerchio di raggio d centrato sullo schermo è

$$P\{R \leq d\} = \int_0^d f_R(r)dr = \int_0^\infty e^{-r/d}\frac{dr}{d} = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1} \cong 0.63$$