Soluzioni

1) [7 pt] Si sceglie a caso un punto nell'intervallo $(0, X)$. Indicando con Y la v.c. che rappresenta l'ascissa di tale punto, si determini la sua d.d.p. $f_Y(y)$ nell'ipotesi che X sia una v.c. uniforme in $(0, 1)$.

Soluzione

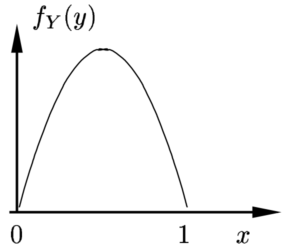
La v.c. X ha d.d.p. $f_X(x) = 1$ per $0 \leq x \leq 1$ e zero altrove. Condizionatamente a $X = x \in (0, 1)$, la d.d.p. di Y è uniforme su $(0, x)$:

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

da cui si ricava che, per $y \notin [1, 0]$, $f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x) = 0$ e dunque anche $f_Y(y) = 0$, mentre per $0 \leq y \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 f_{Y|X}(y \mid x) dx \\ &= \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\log y \end{aligned}$$

2) [7 pt] Siano date due v. c. X e Y indipendenti. X è uniforme su $(0, 1)$, mentre Y ha la seguente d.d.p.:



$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin(\pi y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcoli l'espressione della d.d.p. della v.c. $Z = X - Y$ e se ne dia un grafico accurato.

Soluzione

Detto $W = -Y$, dal teorema fondamentale si ottiene che la d.d.p. di W è $f_W(w) = f_Y(-w)$, cioè corrisponde alla d.d.p. di Y ribaltata rispetto all'asse delle ordinate:

$$f_W(w) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi w) & -1 < w < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora la d.d.p di $Z = X + W$ si ottiene dalla convoluzione delle due d.d.p:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_W(u) f_X(z-u)\, du$$

dove abbiamo scelto di ribaltare e traslare la d.d.p. di X. Con semplici argomenti grafici si verifica che:

i) per $z < -1$ le due funzioni integrande a prodotto non si sovrappongono (il gate $f_X(z-u)$ sta completamente a sinistra di $f_W(u)$) e dunque il loro prodotto è nullo e $f_Z(z) = 0$;

ii) per $-1 < z < 0$ le due funzioni integrande a prodotto si sovrappongono parzialmente (il gate $f_X(z-u)$ sta a sinistra di $f_W(u)$) e dunque il loro prodotto è $-\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)$ per $-1 < u < z$ e nullo altrove, cosicché

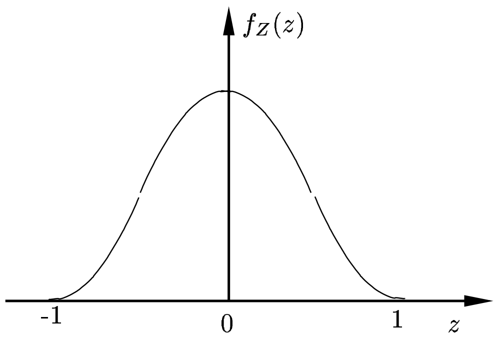
$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z} -\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)\, du = \frac{1+\cos(\pi z)}{2} \quad ;$$

iii) per $0 < z < 1$ le due funzioni integrande a prodotto si sovrappongono parzialmente (il gate $f_X(z-u)$ sta a destra di $f_W(u)$) e dunque il loro prodotto è $-\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)$ per $-(1-z) < u < 0$ e nullo altrove, cosicché

$$f_Z(z) = \int_{-(1-z)}^{0} -\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)\, du = \frac{1-\cos(\pi(1-z))}{2} \quad ;$$

iv) infine per $z > 1$ le due funzioni integrande a prodotto non si sovrappongono più e $f_Z(z) = 0$.

Il grafico è mostrato qui a fianco



3) [6 pt] Si è rilevato che la spesa media mensile per l'alimentazione in una certa popolazione e la deviazione standard sono rispettivmente $\eta = 500$ Euro e $\sigma = 25$ Euro. Determinare per quale frazione della popolazione la spesa differisce dalla spesa media per più di 75 Euro, quando la v.c. spesa ha le seguenti distribuzioni:

a) Distribuzione gaussiana

b) Distribuzione qualunque

Soluzione

Detta S la v.c. "spesa", la frazione cercata rappresenta la probabilità $P\{|S-\eta| > 75\}$.

a) Qui si ha una d.d.p $f_S(s)$ gaussiana a media η e deviazione σ, per cui possiamo scrivere

$$P\{|S-\eta| > 75\} = \int_{-\infty}^{\eta-75} f_S(s)\, ds + \int_{\eta+75}^{\infty} f_S(s)\, ds = ... = 2Q(\frac{75}{\sigma}) \cong 0.00295$$

dove $Q(x)$ é la funzione Q gaussiana, approssimabile con $Q(x) \cong e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi x^2}$ per $x \geq 3$.

b) Nel caso generale possiamo trovare un limite superiore applicando la disuguaglianza di Chebychev $P\{|S-\eta| > k\} < \sigma^2/k^2$, ottenendo:

$$P\{|S-\eta| > 75\} < (\frac{\sigma}{75})^2 = \frac{1}{9} \cong 0.111$$

4) [6 pt] Da un'urna contenente 50 palline, numerate da 1 a 50, si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che la pallina abbia un numero pari, o un numero divisibile per 5, o un numero maggiore di 30.

Soluzione

Detti: $A =$\{pallina pari\}, $B =$\{pallina divisible per 5\}, $C =$\{pallina ≥ 30\} applichiamo la formula

$$\begin{aligned} P\{A \bigcup B \bigcup C\} &= P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{AB\} - P\{AC\} - P\{BC\} + P\{ABC\} \\ &= \frac{25}{50} + \frac{10}{50} + \frac{20}{50} - \frac{5}{50} - \frac{10}{50} - \frac{4}{50} + \frac{2}{50} = \frac{38}{50} = 0.76 \end{aligned}$$

5) [7 pt] Un'urna contiene 10 palline rosse (R), 15 bianche (B) e 5 nere (N). Si estraggono successivamente 3 palline. Nel caso i) ad ogni estrazione si rimette nell'urna la pallina scelta, mentre nel caso ii) no. Si calcoli in entrambi i casi i) ed ii) la probabilità dei seguenti eventi:

a) $E_1 =$\{la prima pallina estratta è R, la seconda B, la terza N\}

b) $E_2 =$\{le tre palline sono una per colore, indipendentemente dall'ordine di estrazione\}

c) $E_3 =$\{due palline estratte sono R e una N, indipendentemente dall'ordine di estrazione\}

Soluzione

Notiamo che nel caso i) le tre estrazioni sono indipendenti, mentre nel caso ii) le estrazioni sono dipendenti, in quanto una estrazione influenza la dimensione dello spazio campione nelle estrazioni successive.

a) Detti: A ={pallina R alla prima estrazione}, B ={pallina B alla seconda estrazione}, C ={pallina N alla terza estrazione}, nel caso i) si ha per l'indipendenza:

$$P\{E_1\} = P\{A\}P\{B\}P\{C\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{30} \cdot \frac{5}{30} = \frac{1}{36} \cong 0.0277$$

mentre nel caso ii)

$$P\{E_1\} = P\{A\}P\{B \mid A\}P\{C \mid AB\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{5}{28} = \frac{25}{812} \cong 0.0307$$

b) Le configurazioni che rappresentano l'evento E_2 sono le $3! = 6$ permutazioni di colori RBN, RNB, BRN, BNR, NRB, NBR, per cui

$$P\{E_2\} = P\{RBN\}+P\{RNB\}+P\{BRN\}+P\{BNR\}+P\{NRB\}+P\{NBR\}.$$

Ora, nel caso i), per l'indipendenza si ha:

$$P\{E_2\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{30} \cdot \frac{5}{30} \cdot 3! = \frac{1}{6} \cong 0.1666$$

mentre nel caso ii) si ha

$$\begin{aligned} P\{E_2\} &= \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{5}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{15}{28} + \frac{15}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{5}{28} + \\ &= \frac{15}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{10}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{15}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{10}{28} \\ &= \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{5}{28} \cdot 3! = \frac{75}{406} \cong 0.1847 \end{aligned}$$

c) Ragionando come al punto (b), le permutazioni di RRN sono in numero pari a $\frac{3!}{2!}$(tutte quelle su RNB, escluse quelle su RR). Dunque nel caso i) si ha

$$P\{E_3\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{5}{30} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{1}{18} \cong 0.0555$$

mentre nel caso ii) si ha

$$P\{E_3\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{5}{28} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{45}{812} \cong 0.0554$$