

Soluzioni

- 1) [8 pt] Il signor Rossi ogni mattina da casa si reca in ufficio percorrendo un primo tratto di strada in T_1 minuti, passando un semaforo che, se rosso, lo costringe ad attendere 5 minuti, e proseguendo su un ultimo tratto di strada per altri T_2 minuti di tragitto. Supponendo pari a 0.5 la probabilità di incontrare il semaforo rosso, e supponendo che le V. A. T_1 e T_2 siano indipendenti ed uniformi sull'intervallo $[0, 5]$ minuti, trovare la densità di probabilità (pdf) della V. A. "tempo impiegato da Rossi per recarsi da casa al lavoro".

Soluzione

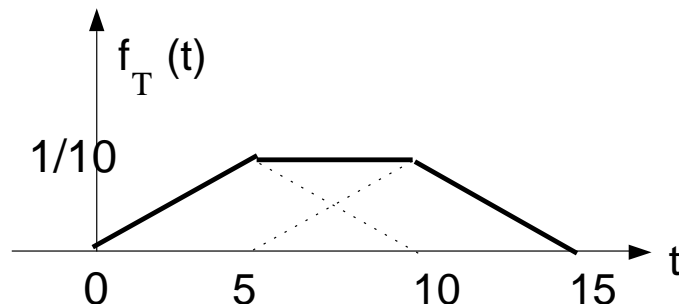
Il tempo totale impiegato si può esprimere come somma di tre V. A. indipendenti:

$$T = T_1 + T_s + T_2$$

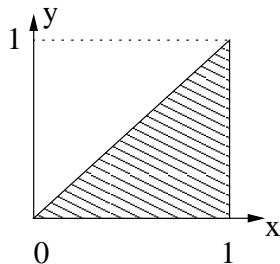
dove T_s è il tempo passato al semaforo, che è una V. A. discreta a due valori, 0 e 5 minuti, equiprobabili. Utilizzando il fatto che la pdf della somma di V. A. indipendenti è ottenuta dalla convoluzione delle densità, definiamo $X = T_1 + T_2$ e subito otteniamo che la pdf $f_X(x)$ di X ha un grafico a triangolo, che sale con una retta dal valore 0 per $x = 0$, al valore massimo $\frac{1}{5}$ per $x = 5$ minuti, e poi ridiscende linearmente a zero fino ad $x = 10$ minuti. Infine la pdf di T si può ottenere dal teorema della probabilità totale per le pdf:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f_T(t|T_s=0)P\{T_s=0\} + f_T(t|T_s=5)P\{T_s=5\} \\ &= f_X(t) \cdot \frac{1}{2} + f_X(t-5) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che la pdf di una V. A. a cui è aggiunta una costante è la pdf traslata del valore della costante. Pertanto si tratta di sommare due triangoli identici, di cui il secondo traslato di 5, e moltiplicare il risultato per $\frac{1}{2}$, con il risultato riportato in figura:



- 2) [9 pt] La pdf congiunta delle V. A. X e Y è la seguente:



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare il valore di $Cov[X, Y]$ e del coefficiente di correlazione $\rho = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}$.

Soluzione

Calcoliamo prima le pdf marginali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^x 2dy = 2x \quad \text{per } 0 < x < 1 \text{ e zero altrove}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_y^1 2dx = 2(1-y) \quad \text{per } 0 < y < 1 \text{ e zero altrove}$$

da cui si trova

$$\eta_X = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}$$

$$\eta_Y = \int_0^1 y \cdot 2(1-y) dy = \frac{1}{3}$$

e

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = \frac{1}{2}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 2(1-y) dy = \frac{1}{6}$$

da cui concludiamo che $Var[X] = E[X^2] - \eta_X^2 = Var[Y] = \frac{1}{18}$. Infine calcoliamo:

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dxdy = \int_{x=0}^1 x \left[\int_{y=0}^x y \cdot 2 dy \right] dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

da cui si ricava

$$Cov[X,Y] = E[XY] - \eta_X \eta_Y = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$$

e infine

$$\rho = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{1/36}{1/18} = \frac{18}{36} = 0.5$$

- 3) [8 pt] Una squadra di calcio è composta da 1 portiere, 4 difensori, 4 centrocampisti e 2 attaccanti. Si assuma che tutti abbiano la stessa probabilità di effettuare tiri nella porta avversaria, che è larga 7 metri, tranne il portiere che non tira mai. Si fissi un asse delle ascisse sulla linea di fondocampo, con lo zero (l'origine dell'asse) al centro della porta avversaria. Ogni tiro taglia la linea di fondocampo ad una ascissa D (il cui valore assoluto rappresenta la distanza dal centro della porta). Tale D è una V. A. con le seguenti pdf: 1) uniforme tra -8 e 8 metri per i tiri dei difensori; 2) $\alpha e^{-\frac{|d|}{4}}$ per i tiri dei centrocampisti; 3) $\beta e^{-\frac{|d|}{2}}$ per i tiri degli attaccanti;

- Determinati i valori di α e β , calcolare la probabilità che un tiro generico finisca nello specchio della porta avversaria.
- Osservando che un tiro è finito a meno di 2 metri dal centro della porta, ma a più di un metro, stabilire quale ruolo ricopre con maggior probabilità il giocatore che ha effettuato il tiro, e quanto vale tale probabilità.

Soluzione

- a) La costante α si determina per normalizzazione:

$$1 = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|u|}{4}} du = \alpha \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{4}} du = 8\alpha$$

da cui deduciamo $\alpha = 1/8$. Analogamente si ottiene $\beta = 1/4$. Infine si cerca la probabilità dell'evento "tiro nello specchio della porta", cioè $\mathcal{E} = \{-3.5 \leq D \leq 3.5\}$. Definiamo gli eventi: \mathcal{F} = "tira un difensore"; \mathcal{C} = "tira un Centrocampista"; \mathcal{A} = "tira un Attaccante". Dal teorema della probabilità totale si ha:

$$P\{\mathcal{E}\} = P\{\mathcal{E}|\mathcal{F}\}P\{\mathcal{F}\} + P\{\mathcal{E}|\mathcal{C}\}P\{\mathcal{C}\} + P\{\mathcal{E}|\mathcal{A}\}P\{\mathcal{A}\}$$

dove dai dati risulta: $P\{\mathcal{F}\} = \frac{4}{10}$, $P\{\mathcal{C}\} = \frac{4}{10}$, $P\{\mathcal{A}\} = \frac{2}{10}$. Ora calcoliamo le probabilità condizionate usando le densità condizionate forniteci nei dati iniziali:

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{E}|\mathcal{F}\} &= \int_{-3.5}^{3.5} \frac{1}{16} du = \frac{7}{16} = 0.437 \\ P\{\mathcal{E}|\mathcal{C}\} &= \int_{-3.5}^{3.5} \alpha e^{-\frac{|u|}{4}} du = \frac{2}{8} \int_0^{3.5} e^{-\frac{u}{4}} du = 1 - e^{-3.5/4} \cong 0.583 \\ P\{\mathcal{E}|\mathcal{A}\} &= \int_{-3.5}^{3.5} \beta e^{-\frac{|u|}{2}} du = \frac{2}{4} \int_0^{3.5} e^{-\frac{u}{2}} du = 1 - e^{-3.5/2} \cong 0.826 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$P\{\mathcal{E}\} = 0.437 \cdot 0.4 + 0.583 \cdot 0.4 + 0.826 \cdot 0.2 = 0.573$$

- b) l'evento condizionante è $\mathcal{S} = \{1 < |D| < 2\}$. Si cercano le probabilità condizionate $P\{\mathcal{F}|\mathcal{S}\}$, $P\{\mathcal{C}|\mathcal{S}\}$ e $P\{\mathcal{A}|\mathcal{S}\}$. Dapprima si cerca, per il teorema della probabilità totale:

$$P\{\mathcal{S}\} = P\{\mathcal{S}|\mathcal{F}\}P\{\mathcal{F}\} + P\{\mathcal{S}|\mathcal{C}\}P\{\mathcal{C}\} + P\{\mathcal{S}|\mathcal{A}\}P\{\mathcal{A}\}$$

dove

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{S}|\mathcal{F}\} &= 2 \int_1^2 \frac{1}{16} du = \frac{2}{16} = 0.125 \\ P\{\mathcal{S}|\mathcal{C}\} &= 2 \int_1^2 \alpha e^{-\frac{u}{4}} du = \frac{2}{8} \cdot 4 \int_{1/4}^{2/4} e^{-x} dx = e^{-1/4} - e^{-1/2} \cong 0.172 \\ P\{\mathcal{S}|\mathcal{A}\} &= 2 \int_1^2 \beta e^{-\frac{u}{2}} du = \frac{2}{4} \cdot 2 \int_{1/2}^{2/2} e^{-x} dx = e^{-1/2} - e^{-1} \cong 0.238 \end{aligned}$$

da cui

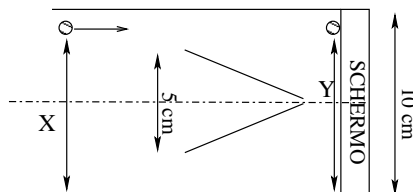
$$P\{\mathcal{S}\} = 0.125 \cdot 0.4 + 0.172 \cdot 0.4 + 0.238 \cdot 0.2 = 0.166$$

Poi, per il teorema di Bayes si ha:

$$\begin{aligned} P\{\mathcal{F}|\mathcal{S}\} &= \frac{P\{\mathcal{S}|\mathcal{F}\}P\{\mathcal{F}\}}{P\{\mathcal{S}\}} = \frac{0.05}{0.166} = 0.301 \\ P\{\mathcal{C}|\mathcal{S}\} &= \frac{P\{\mathcal{S}|\mathcal{C}\}P\{\mathcal{C}\}}{P\{\mathcal{S}\}} = \frac{0.068}{0.166} = 0.409 \\ P\{\mathcal{A}|\mathcal{S}\} &= \frac{P\{\mathcal{S}|\mathcal{A}\}P\{\mathcal{A}\}}{P\{\mathcal{S}\}} = \frac{0.047}{0.166} = 0.286 \end{aligned}$$

pertanto, dato \mathcal{S} , è più probabile che ad effettuare il tiro sia stato un Centrocampista.

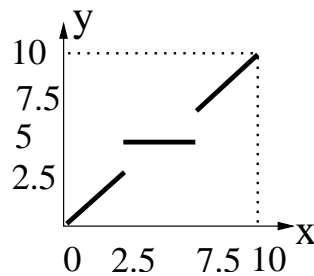
- 4) [8 pt] Un esperimento consiste nel lanciare in un condotto una particella con traiettoria orizzontale contro uno schermo, come mostrato in figura.



Schermo e condotto sono alti 10 centimetri (si pensi al condotto come ad una figura piana, ignorandone la profondità). Si assuma che la coordinata verticale X della particella sia una V. A. uniformemente distribuita tra 0 e 10 centimetri. Prima dello schermo vi è un imbuto, con bocca di ingresso alta 5 centimetri e bocca di uscita infinitesima (sufficiente a far passare la particella) e coassiale al condotto, che convoglia una particella entrante sull'asse del condotto. Si determini la densità di probabilità della V. A. Y ="coordinata verticale della particella quando colpisce lo schermo".

Soluzione

Dalla figura si evince che Y è una funzione di X così definita: se $0 < X < 2.5$ o $7.5 < X < 10$, allora $Y = X$ poichè la particella arriva dritta sullo schermo. Se invece $2.5 < X < 7.5$, allora $Y = 5$ centimetri, poichè la particella è convogliata al centro dello schermo. Il grafico di tale funzione $y = g(x)$ è mostrato qui sotto:



Applicando il teorema fondamentale per il calcolo della pdf di funzione di V. A. si ottiene:

- Fuori campo di definizione: $f_Y(y)$ è nulla al di fuori dell'intervallo $[0, 2.5] \cup [7.5, 10] \cup \{5\}$ che rappresenta il range della funzione $y = g(x)$.
- Zone piatte: $f_Y(y)$ ha una delta di Dirac centrata ad $y = 5$ e con peso (area) pari a $P\{2.5 < X < 7.5\} = 0.5$, che corrisponde al peso della zona piatta della funzione $y = g(x)$.
- Infine nell'intervallo $y \in [0, 2.5] \cup [7.5, 10]$ esiste una sola soluzione dell'equazione $y = g(x)$, e tale soluzione è $x = y$. Pertanto il teorema fondamentale dice che in questo intervallo si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(y)}{|g'(y)|} = \frac{1}{10}$$