

Soluzioni

- 1) [6 pt] Prima del lancio di un nuovo prodotto, un'azienda conduce una ricerca di mercato. Si sa che la ricerca ha la seguente affidabilità: se il prodotto avrà successo, essa lo indicherà correttamente nel 75% dei casi, mentre se il prodotto non avrà successo, essa pronosticherà (erroneamente) il successo nel 15% dei casi. Dalle statistiche aziendali si sa che un nuovo prodotto ha il 60% di probabilità di avere successo sul mercato. Supponendo che la ricerca abbia previsto il successo, qual è la probabilità che il prodotto avrà effettivamente successo?

Soluzione

Definiti gli eventi:

$$S = \{\text{prodotto ha successo}\} \quad I = \{\text{prodotto ha insuccesso}\}$$

$$\mathcal{E} = \{\text{la ricerca prevede successo}\}. \text{ Cerchiamo } P\{S|\mathcal{E}\}.$$

- a) per il teorema della probabilità totale si ha:

$$P\{\mathcal{E}\} = P\{\mathcal{E}|S\}P\{S\} + P\{\mathcal{E}|I\}P\{I\} = 0.75 \cdot 0.6 + 0.15 \cdot 0.4 = 0.51$$

- b) per il teorema di Bayes si ha

$$P\{S|\mathcal{E}\} = \frac{P\{\mathcal{E}|S\}P\{S\}}{P\{\mathcal{E}\}} = \frac{0.75 \cdot 0.6}{0.51} = 0.88$$

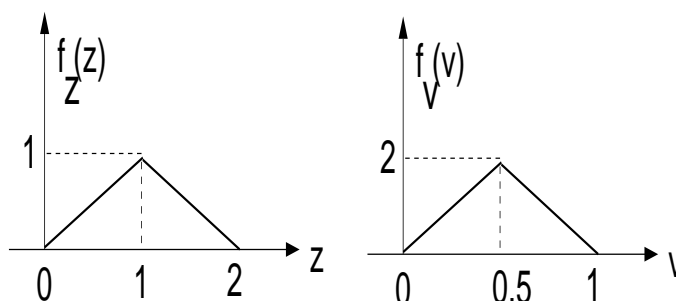
- 2) Date le V.A. U_1 e U_2 indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $[0, 1]$, si calcoli la densità di probabilità (d.d.p.) delle seguenti V.A., *tracciandone accuratamente il grafico*:

a) [5 pt] $V = (U_1 + U_2)/2$;

b) [5 pt] $W = |U_1 - U_2|$.

Soluzione

(a) Si tratta prima di trovare la d.d.p. della V.A. $Z = U_1 + U_2$, con U_1 e U_2 indipendenti, cioè la convoluzione delle rispettive d.d.p., cioè i due gate unitari. Il risultato dell'operazione grafica è mostrato nella seguente figura, a sinistra:

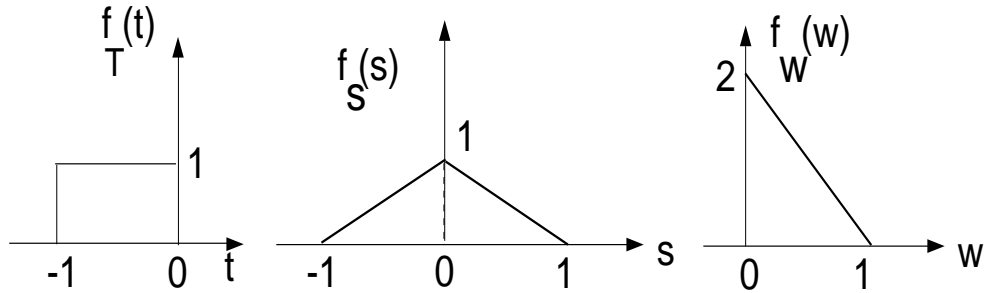


Verifiche: 1) la durata (l'intervallo su cui la funzione $f_Z(z)$ è non nulla) deve essere la somma delle durate delle d.d.p. coinvolte, cioè $1 + 1 = 2$; 2) il valore massimo si ha quando la sovrapposizione delle funzioni coinvolte è massima, cioè quando il gate ribaltato è traslato di 1. L'integranda in quel caso vale

$1 \cdot 1 = 1$ ed è non nulla sulla durata 1 del gate fisso, dando un'integrale pari a: (base-altezza)= $1 \cdot 1 = 1$;
 3) l'area sottesa dalla d.d.p è $2 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1$, che è la corretta normalizzazione della d.d.p. Sulla destra della figura vediamo poi l'effetto della divisione per due: $V = aZ$, con $a = 1/2$, secondo la nota regola (teorema fondamentale):

$$f_V(v) = f_Z(v/a)/|a|$$

(b) Definiamo $T = -U_2$, la cui d.d.p (teorema fondamentale) è mostrata nella seguente figura, a sinistra:

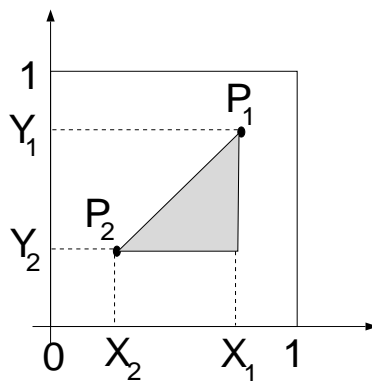


e definiamo $S = U_1 + T$, somma di due V.A. indipendenti, la cui d.d.p. si ottiene per convoluzione delle rispettive d.d.p, ed il risultato di tale convoluzione è ancora un triangolo, come mostrato in figura al centro. Infine abbiamo $W = |S|$, la cui d.d.p. si ottiene per applicazione del teorema fondamentale:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{f_S(w)}{|1|} + \frac{f_S(-w)}{|-1|} & \text{per } w \geq 0 \\ 0 & \text{per } w < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2f_S(w) & \text{per } w \geq 0 \\ 0 & \text{per } w < 0 \end{cases}$$

essendo $f_S(s)$ simmetrica. Tale d.d.p. è mostrata in figura sulla destra: tale densità corrisponde al ribaltamento della massa di probabilità relativa ai valori negativi sopra quella per i valori positivi.

- 3) Si lanciano *a caso* e indipendentemente due punti, P_1 di coordinate (X_1, Y_1) e P_2 di coordinate (X_2, Y_2) , nel quadrato di lato unitario mostrato in figura:



- a) [4 pt] Si trovi la densità di probabilità della V.A. X_1 e quella della V.A. Y_1 . Quanto vale la covarianza di X_1 e Y_1 ?
- b) [7 pt] Si valuti la probabilità che l'area del triangolo rettangolo mostrato in figura, avente per vertici opposti all'angolo retto i due punti dati, sia superiore a $1/4$.

Soluzione

(a) Lancio di un punto *a caso* sul quadrato di lato unitario: si tratta di un esperimento in spazio uniforme, dove lo spazio campione è rappresentato dal rettangolo di lato unitario. La densità di probabilità congiunta delle variabili (X_1, Y_1) è dunque costante su tale rettangolo ed uguale all'inverso dell'area unitaria del rettangolo (condizione di normalizzazione), e nulla altrove:

$$f_{X_1 Y_1}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La densità marginale di X_1 si ricava per integrazione rispetto all'altra variabile:

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 Y_1}(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 1 dy & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

cioè X_1 è uniforme su $[0, 1]$, e similmente si trova che tale è anche Y_1 . Poiché risulta che $f_{X_1 Y_1}(x, y) = f_{X_1}(x)f_{Y_1}(y)$, allora (X_1, Y_1) sono indipendenti, e dunque anche incorrelate, cioè $Cov[X_1, Y_1] = 0$.

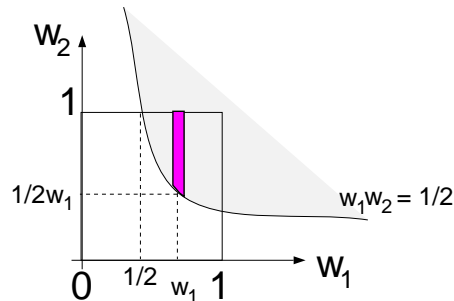
(b) Diciamo A l'area del triangolo rettangolo. Dalla figura è immediato dedurre che

$$A = |X_1 - X_2| \cdot |Y_1 - Y_2| \cdot \frac{1}{2}$$

essendo X_1, Y_1, X_2, Y_2 V.A. indipendenti. Dunque anche le V.A. $W_1 = |X_1 - X_2|$ e $W_2 = |Y_1 - Y_2|$ sono indipendenti perchè trasformazioni di V.A. indipendenti. Ma la d.d.p. di W_1 e W_2 ci è già nota dall'esercizio precedente, seconda figura, ultimo grafico sulla destra. Analiticamente essa è data da:

$$f_W(w) = \begin{cases} 2(1-w) & \text{per } 0 < w < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si tratta ora di valutare la probabilità dell'evento $\{A > 1/4\} = \{W_1 \cdot W_2 > 1/2\}$. Tale probabilità si valuta integrando la d.d.p. congiunta di (W_1, W_2) sul dominio $\mathcal{D} = \{(w_1, w_2) : w_1 w_2 > 1/2\}$ mostrato qui sotto:



Si tratta di integrare, per esempio, la d.d.p. per striscie verticali fissando w_1 e variando w_2 tra $1/(2w_1)$ e 1. La variabile w_1 viene variata da $1/2$ ad 1. Pertanto la probabilità cercata è:

$$\begin{aligned} P\{W_1 \cdot W_2 > 1/2\} &= \int \int_{\mathcal{D}} f_W(w_1) f_W(w_2) dw_2 dw_1 \\ &= \int_{1/2}^1 f_W(w_1) \left[\int_{1/2w_1}^1 f_W(w_2) dw_2 \right] dw_1 \\ &= \int_{1/2}^1 2(1-w_1) \left[\int_{1/2w_1}^1 2(1-w_2) dw_2 \right] dw_1 \\ &= 4 \int_{1/2}^1 (1-w) \left[1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2w} - \frac{1}{8w^2} \right) \right] dw \\ &= \frac{4}{2} \int_{1/2}^1 \left(1 - w - \frac{1}{w} + 1 + \frac{1}{4w^2} - \frac{1}{4w} \right) dw \\ &= \frac{7}{4} - \frac{5}{2} \ln 2 \cong 0.017 \end{aligned}$$

4) [6 pt] Date le v.c. X, Y e Z , aventi varianza unitaria e covarianze pari a:

$$\begin{cases} \text{Cov}[X, Y] = -0.5 \\ \text{Cov}[X, Z] = 0.5 \\ \text{Cov}[Y, Z] = 0.5 \end{cases}$$

e definite le v.c. V e W come segue:

$$\begin{cases} V = 3Z - 5Y \\ W = -3X + 2Z \end{cases}$$

se ne calcoli il coefficiente di correlazione ρ_{VW} .

Soluzione

Usando la bilinearità della covarianza:

$$\text{Cov}\left[\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j\right] = \sum_i \sum_j a_i b_j \text{Cov}[X_i, Y_j]$$

nel nostro caso otteniamo, ricordando che $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$:

$$\text{Cov}[V, W] = -9\text{Cov}[Z, X] + 6\text{Cov}[Z, Z] + 15\text{Cov}[X, Y] - 10\text{Cov}[Y, Z] = -11$$

Usando ancora la bilinearità della covarianza concludiamo che: $\text{Var}[V] = 9\text{Var}[Z] + 25\text{Var}[Y] - 2 \cdot 15\text{Cov}[Z, Y] = 19$ e $\text{Var}[W] = 9\text{Var}[X] + 4\text{Var}[Z] - 2 \cdot 6\text{Cov}[X, Z] = 7$, cosicché $\rho_{VW} = \frac{\text{Cov}[V, W]}{\sqrt{\text{Var}[V]\text{Var}[W]}} = -11/\sqrt{19 \cdot 7} \cong -0.95$.