

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione

Dottorato di Ricerca in Tecnologie dell'Informazione

X Ciclo

Armando Vannucci

RICEVITORI A STIMA DI SEQUENZA PER CANALI  
DI TRASMISSIONE NON LINEARI

DISSERTAZIONE PRESENTATA PER IL CONSEGUIMENTO DEL TITOLO DI  
DOTTORE DI RICERCA



*A mia madre,  
che sa capire.*

*A Manuela,  
che mi ha insegnato  
a volare.*



# Indice

<b>Ringraziamenti</b>	<b>9</b>
<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
<b>1 Modello equivalente in banda base di canali non lineari</b>	<b>15</b>
1.1 Introduzione . . . . .	15
1.2 Modello della non linearità . . . . .	18
1.2.1 Non-linearità in banda passante . . . . .	18
1.2.2 Non linearità polinomiali . . . . .	23
1.2.3 Sviluppo polinomiale di BPNL caratterizzate sperimentamente . . . . .	26
1.3 Modello in banda-base del canale non lineare . . . . .	29
1.3.1 Calcolo dei parametri di dispersione non lineari . . . . .	33
1.3.2 I coefficienti di dispersione nel caso di canale di Rummler	38
1.3.3 Appendice . . . . .	41
<b>2 Ricevitori a stima di sequenza per canali non lineari</b>	<b>45</b>
2.1 Introduzione . . . . .	45
2.2 Ricevitore con campionamento ad intervallo di simbolo . . . . .	48
2.3 Il ricevitore ottimo con sovracampionamento . . . . .	53
2.4 Sviluppi ulteriori . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Valutazione analitica delle prestazioni</b>	<b>61</b>
3.1	Introduzione . . . . .	61
3.2	Prestazioni di un ricevitore ottimo per canale non lineare . . . .	63
3.2.1	Il parametro di non linearità cubica $\xi$ . . . . .	80
3.2.2	Prestazioni di un sistema monodimensionale su canale a larga banda . . . . .	84
3.2.3	Uso del back-off di ingresso e sua ottimizzazione . . . . .	98
3.3	Prestazioni di un ricevitore convenzionale per canale non lineare	105
3.3.1	Ottimizzazione del guadagno al ricevitore . . . . .	113
3.3.2	Relazione tra le prestazioni di ricevitore ottimo e subot- timo: ruolo del rumore . . . . .	115
3.4	Sviluppi ulteriori . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Analisi di sistema in canali a larga banda</b>	<b>121</b>
4.1	Sistema con non linearità cubica . . . . .	122
4.1.1	Scelte di sistema . . . . .	122
4.1.2	Risultati ottenuti . . . . .	127
4.2	Sistema con non linearità a limitatore . . . . .	129
4.2.1	Realizzazione del sistema . . . . .	130
4.2.2	Risultati ottenuti . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Analisi di sistema in canali a banda stretta</b>	<b>141</b>
5.1	Realizzazione del sistema . . . . .	142
5.1.1	Filtro di trasmissione . . . . .	144
5.1.2	Non linearità . . . . .	147
5.1.3	Ricevitore . . . . .	147
5.2	Risultati ottenuti . . . . .	149
5.2.1	Risultati per sistema con NL cubica . . . . .	150
5.2.2	Limiti alle prestazioni ottenibili con non linearità cubica	154
5.2.3	Risultati per sistema con NL Italtel . . . . .	161

<i>Indice</i>	7
5.2.4 Risultati per sistema con NL Italtel in presenza di un fattore di back-off . . . . .	163
<b>Conclusioni</b>	<b>167</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>173</b>
<b>Indice delle Figure</b>	<b>177</b>



## RINGRAZIAMENTI

Vorrei, prima ancora di introdurre il lavoro svolto, ricordare tutte quelle persone che hanno reso importante per me questo triennio, fatto di lavoro ma anche di altre esperienze piú importanti.

Innanzitutto grazie a Gabriella Di Benedetto e a Riccardo Rossetti, con cui ho scoperto il piacere della ricerca scientifica. Ringrazio Manuela, che ha condiviso con me almeno due anni della mia permanenza a Parma (e non è facile farlo da 600km di distanza).

Grazie al Prof. Giorgio Picchi, che ha saputo mostrare interesse per il mio lavoro, e al Prof. Giancarlo Prati, mio tutore. Riccardo Raheli non vuole essere ringraziato e non lo ringrazierò: mi limiterò a dire che è da lui che ho imparato tutto quello che so sulle trasmissioni numeriche. Grazie anche a Giulio Colavolpe e Piero Castoldi, oltre che amici anche ottimi maestri per me che di telecomunicazioni ne so assai meno di loro.

Grazie per la loro simpatia a tutti i ragazzi, tesisti e non, che hanno frequentato la trattoria “Alta Tensione” (ex “Al Ponte Radio”), vera istituzione della palazzina 2 del nostro dipartimento: Rapo, Gibo, Franci e Lorenz, Sabri, Lindóna, Phoebio, Matteo e Monika, il Manzo, Giovanni Tamiri, Andrea, Eli, Lidia, GBellotti, Varo, Lorenzo, Mattia, Joseph, Anna, Carola, Luca Vincetti, Meno, Paddy, Antonella Cristian (che mi ha stressato con il fumo) e tutti quelli i cui nomi ho tralasciato. E poi ai “miei laureandi”: Alle, Paola e Mauri.

Grazie a Betta, Pietro e le *tose* Katy e Barbara, per aver sopportato me e miei gatti Paolo e Skinny (ma soprattutto me).

Un saluto ai compagni *dispersi sul campo*: JJ e le sue innumerevoli donne,

Roberto e Mo, che personalizzano il perfetto connubio nord-sud, Rodolfo, e Antonia, che si dovrebbe volere piú bene.

Grazie ad Alberto, che con la sua presenza mi ricorda la passione per la ricerca che anch'io vorrei avere. A Luca e Mema, per la vitalità e le nottate a Risiko.

Grazie a tutte quelle persone conosciute qui che si sono dimostrate amiche: Anna De Tuglie, Marco Lugli, Laura Piro, la Valdostrana, Sabrinina, Sabine Krahe (per il suo ordinatissimo disordine mentale). E al mio cousin Armandino Trento/Claypool, che non ho conosciuto qui, per il vero disordine mentale. A Lara e a tutti i ragazzi del teatro Lenz, che hanno costruito momenti intensissimi in così poco tempo.

Un grazie tutto particolare a Silvia, 'che non è facile incontrare una persona e poterla chiamare Amica.

# Introduzione

Il lavoro descritto in questa tesi affronta, come tema centrale, lo studio di sistemi di trasmissione numerica su canali non lineari, con particolare attenzione ai sistemi di radiotrasmissione. I problemi posti da tale genere di canali, abbondantemente descritti nella letteratura tecnica, sono molteplici: i dispositivi non lineari causano un allargamento spettrale dei segnali trasmessi su canale fisico, distorcono la costellazione di simboli disponibile al trasmettitore, causano interferenza da canali adiacenti (*Adjacent Channel Interference*, ACI) e rendono difficilmente applicabili tutte le tecniche di progetto e di analisi di sistemi basate sul concetto di canale lineare.

Gli approcci al problema proposti nella letteratura tecnica esistente sono classificabili a grandi linee in due filoni principali; il primo di questi, che potremmo designare come *metodi di azione sul trasmettitore*, mira a rimuovere o ad attenuare gli effetti delle non linearità tramite opportune tecniche di linearizzazione (predistorsione sul segnale analogico, predistorsione sui dati), il secondo, designabile come *metodi di azione sul ricevitore*, mira invece a trattare in maniera opportuna i segnali provenienti da canali afflitti da distorsione non lineare e a compensare, tramite varie tecniche (equalizzazione, stima di sequenza), tali distorsioni.

È nel secondo di tali filoni che il presente lavoro può essere inquadrato, così come evidenziato dal titolo della tesi; in particolare si desidera estendere le ben note tecniche di stima di sequenza, impiegate dai moderni ricevitori numerici per canali lineari, al caso di nostro interesse. La letteratura tecnica, molto più

copiosa per il primo dei filoni menzionati, è in particolare assai scarsa riguardo al problema su cui ci focalizzeremo; ciò accade evidentemente per i seri problemi, accennati sopra, a cui si va incontro ammettendo la presenza di elementi non lineari nel canale di trasmissione. I pochi lavori reperibili al riguardo presentano inoltre soluzioni di elevata complessità progettuale.

Ciononostante, i risultati esistenti appaiono incoraggianti per ciò che riguarda le prestazioni potenzialmente ottenibili tramite un adeguato trattamento dei segnali non linearmente modulati. Ci si pone quindi come problema centrale, accanto al progetto di un ricevitore a stima di sequenza idoneo per l'impiego su canali non lineari, il problema di analizzare le prestazioni teoricamente ottenibili su tali canali, evidenziare i parametri che maggiormente le influenzano e mettere in luce, ove esistano, le limitazioni intrinseche ad un canale con dispositivi di trasmissione non lineari.

L'organizzazione generale della tesi è la seguente: nel capitolo 1 si richiamano e si estendono alcune tecniche di modellistica di canali non lineari e dei segnali che vi transitano, cercando di unire alla generalità dell'approccio adottato una adeguata semplicità analitica. Nel capitolo 2 si sfrutta tale approccio modellistico generale e semplice al fine di progettare un ricevitore a stima di sequenza per canale non lineare di complessità ridotta rispetto alle soluzioni esistenti in letteratura. Il capitolo 3 si occupa in maniera approfondita della determinazione analitica delle prestazioni del ricevitore proposto nonché di altre soluzioni alternative. Di seguito ad un approccio generale al problema, si prendono in considerazione canali non lineari a larga banda, privi di interferenza intersimbolica: ciò consente, pur nella irrealisticità di tale assunzione, di approfondire la conoscenza dei fattori determinanti ai fini delle prestazioni. Il capitolo 4 espone e commenta le prestazioni di un sistema che includa le semplificazioni ora citate, da un punto di vista simulativo, completando le considerazioni del capitolo precedente con i risultati delle simulazioni. Infine, nel capitolo 5 si affronta la simulazione di un sistema dispersivo nel tempo che impieghi il ricevitore a stima di sequenza proposto; unitamente, nel § 5.2.2, si estende l'approccio

del capitolo 3 al caso generale di canale non lineare dispersivo (a banda stretta), fornendo un metodo di valutazione analitica delle prestazioni in buon accordo con i risultati simulativi.

Oltre al metodo di *analisi al ricevitore*, che qui abbiamo seguito, si è cercato di fornire dati di confronto con tecniche alternative, quali l'impiego di un fattore di *back-off* al trasmettitore (capitoli 1, 2, 3) e, in particolare, si è perseguito un confronto costante con le prestazioni ottenibili da un sistema lineare ottenibile tramite una perfetta predistorsione del dispositivo non lineare che mantenga la medesima potenza di picco in uscita dal dispositivo. I risultati conseguiti in tale confronto risultano a nostro avviso sufficientemente interessanti da giustificare l'approccio seguito e le semplificazioni di volta in volta adottate al fine di rendere il discorso comprensibile e di accettabile complessità analitica.



# Capitolo 1

## Modello equivalente in banda base di canali non lineari

### 1.1 Introduzione

La presenza di distorsioni non lineari (NL) nel segnale emesso da un apparato di trasmissione radio è un fatto molto comune sia nei sistemi di comunicazione via satellite sia nei sistemi in ponte radio terrestre, laddove, per utilizzare l'amplificatore di trasmissione in maniera efficiente, si desidera farlo operare in prossimità della *saturazione*: sfruttando cioè al massimo la dinamica della sua caratteristica ingresso-uscita.

Essendo di norma il sistema progettato sulla base di un modello lineare dei segnali e dei dispositivi, le prestazioni che se ne ricavano sono tanto peggiori di quelle teoricamente previste quanto più la caratteristica dell'amplificatore (nella zona di lavoro) si discosta da una retta.

Le contromisure generalmente adottate nella pratica si riassumono in due alternative, le quali limitano entrambe la propria azione sul solo dispositivo non lineare, cercando di mitigarne in qualche modo gli effetti di distorsione. Nella prima alternativa si limita la potenza di uscita dell'amplificatore in modo da impiegare solo un primo tratto di caratteristica sufficientemente lineare; si dice

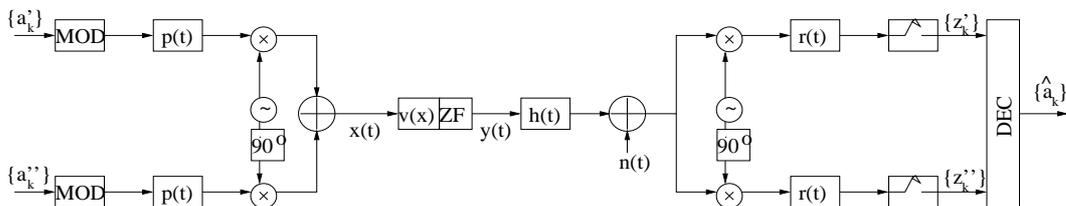


Figura 1.1: Sistema numerico con amplificatore NL

in tal caso che l'amplificatore lavora in condizioni di *back-off*. Ciò equivale a spingere l'uso dell'amplificatore verso la saturazione in misura ragionevole: accettando cioè una parte di distorsione non lineare come se fosse una sorta di rumore aggiuntivo, che degrada le prestazioni, senza però che la sua entità sia tale da inficiare il modello lineare sul quale il progetto del sistema è basato. Nella seconda alternativa si tenta di ricondurre il sistema non lineare ad uno lineare mediante una compensazione della caratteristica del dispositivo; la compensazione si realizza attraverso l'introduzione di una seconda non linearità, a monte di quella da compensare, che predistorca il segnale con una legge inversa rispetto alla caratteristica da compensare.

Una terza via, specifica, che qui intendiamo seguire, è quella di ammettere esplicitamente l'esistenza di una caratteristica non lineare e tenere in conto le conseguenze che ne derivano, cercando di modellare opportunamente segnali e dispositivi al fine di progettare un sistema *ad-hoc* che estraiga dal segnale ricevuto tutta l'informazione che esso convoglia.

La figura 1.1 mostra un modello di sistema di trasmissione numerico con modulazione di ampiezza in quadratura (*quadrature amplitude modulation*, QAM) in presenza di un amplificatore con caratteristica non lineare  $v(x)$ . I modulatori dei due rami (blocchi contrassegnati MOD) generano, sulla base delle sequenze di informazione  $\{a'_k\}$  e  $\{a''_k\}$ , due segnali con modulazione ad ampiezza di impulsi (*pulse amplitude modulation*, PAM) ideali, che vengono filtrati dal filtro di trasmissione con risposta all'impulso  $p(t)$ , il canale fisico è rappresentato dal

blocco  $h(t)$  e dal rumore termico  $n(t)$  mentre i filtri impiegati al ricevitore, seguiti dai campionatori con periodo di campionamento pari all'intervallo di simbolo, hanno risposta all'impulso  $r(t)$ ; il blocco contrassegnato DEC rappresenta infine l'algoritmo di decisione basato sui campioni osservabili  $z'_k$  e  $z''_k$ , ottenuti con frequenza di campionamento pari a quella di segnalazione. L'elemento non lineare è rappresentato dalla caratteristica ingresso-uscita  $v(x)$ . Il blocco indicato con la sigla ZF (*Zonal Filter*) è un filtro “di zona”, il quale cioè limita le componenti frequenziali del segnale  $y(t)$  a quelle che cadono nell'intorno della frequenza portante del sistema; la sua presenza è dovuta alla natura passabanda della non linearità e l'effetto che ne deriva è la soppressione delle porzioni di segnale, in uscita da  $v(x)$ , che sono in banda base o a frequenze multiple della portante. Le ipotesi assunte per il dispositivo  $v(x)$ , e generalmente verificate nei casi di interesse, sono: che operi in **banda passante**, con l'implicazione — già descritta — dell'esistenza di un filtro ZF, che sia **invariante nel tempo** e, naturalmente, che sia **istantanea** ovvero **senza memoria**, con l'implicazione che sia quindi anche non-selettiva in frequenza ovvero che espliciti la stessa azione su segnali sinusoidali (ad esempio) di frequenza diversa.

Menzioniamo fin d'ora gli effetti che una non linearità passa-banda (*band-pass non linearity*, BPNL) del tipo detto causa sul segnale in transito: un primo effetto, detto AM/AM (*amplitude modulation*, AM), consiste in una alterazione dell'involuppo del segnale di uscita in funzione di quello del segnale di ingresso; un secondo effetto, detto AM/PM (*phase modulation*, PM), causa invece un'alterazione della fase del segnale di uscita in funzione ancora del modulo del segnale di ingresso. Tali effetti, i cui nomi sono del tutto intuitivi, verranno trattati a fondo nel prossimo paragrafo; basti per ora osservare in figura 1.2, a fini esemplificativi, l'effetto che essi hanno sulla trasmissione dei punti di una costellazione 16-QAM. La figura presume un canale ideale, privo di intersimbolo e di rumore additivo.

Gli scopi che ci prefiggiamo per i prossimi paragrafi sono:

- ricavare, tramite opportuna rappresentazione di  $v(x)$ , un modello equiva-

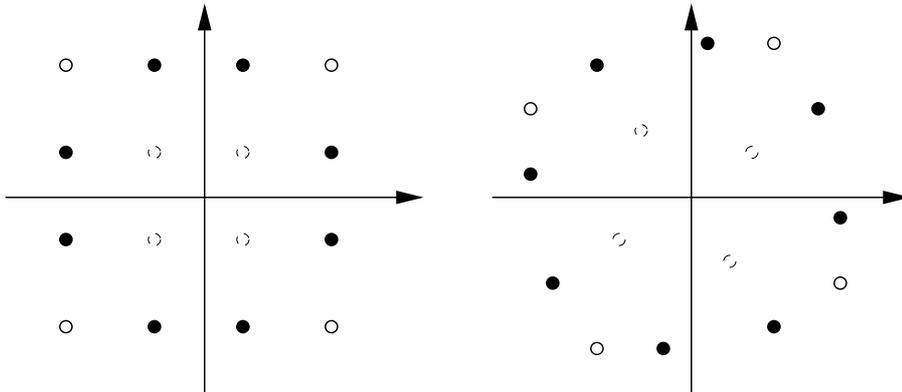


Figura 1.2: Effetti di AM/AM ed AM/PM su 16-QAM

lente in banda base (BB) del sistema NL, analogamente a quanto si fa di norma per i sistemi lineari;

- riprogettare il ricevitore in modo ottimo (nel senso di minimizzare la probabilità di errore sulla sequenza di informazione) tenendo esplicitamente in conto la presenza dell'elemento BPNL. Infatti il ricevitore di figura 1.1 è ottimo, con una opportuna scelta di  $r(t)$  e dell'algoritmo di decisione, solo se il sistema è lineare, ovvero se  $v(x)$  è assimilabile ad una retta.

## 1.2 Modello della non linearità

### 1.2.1 Non-linearità in banda passante

Per meglio evidenziare gli effetti di una non linearità passa-banda accennati nel paragrafo precedente supponiamo di esaminarne l'uscita relativa ad un ingresso sinusoidale di ampiezza  $A$  e frequenza  $f_0$  (si veda la figura 1.3); i simboli  $\tilde{x}(t)$  e  $\tilde{y}(t)$  rappresentano gli involucri complessi dei segnali di ingresso ed uscita, rispettivamente, della BPNL. La non linearità istantanea genera varie armoniche a frequenze multiple di  $f_0$ , delle quali solo la fondamentale è presente in uscita

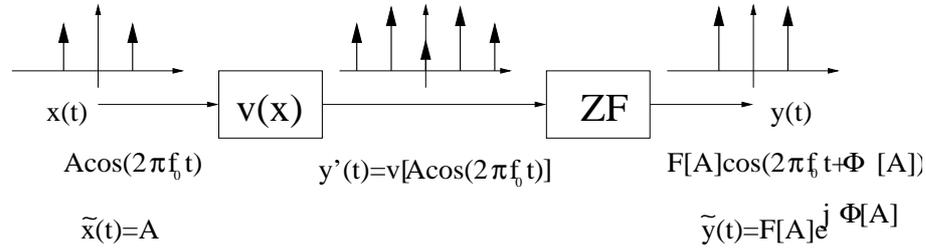


Figura 1.3: Uscita di BPNL con sinusoidi di test

dal filtro ZF. Il segnale di uscita è quindi sinusoidale di frequenza  $f_0$ ; la sua ampiezza e fase non dipendono da  $t$  (in quanto la BPNL è invariante nel tempo) né da  $f_0$ ; in tal caso la BPNL si dice non-selettiva in frequenza. Esse dipendono quindi soltanto da  $A$ . Dette rispettivamente  $F[A]$  e  $\Phi[A]$  tali grandezze, si possono rappresentare in un grafico i valori sperimentalmente assunti da esse al variare di  $A$ : questo è ciò che si fa nella pratica e le curve così determinate sono le curve di conversione AM/AM ed AM/PM che caratterizzano la BPNL. Il blocco ZF della figura 1.3 verrà omesso nel seguito, rimanendo inteso che esso è implicitamente presente in ogni BPNL.

Ciò che accade per un ingresso in *banda stretta* è del tutto analogo a quanto visto per la sinusoidi, come dimostrato in [1] cap. 2, ovvero: se l'ingresso ha involuppo complesso

$$\tilde{x}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad (1.1)$$

l'involuppo complesso dell'uscita sarà

$$\tilde{y}(t) = F[A(t)]e^{j\Phi[A(t)]}e^{j\varphi(t)} \quad (1.2)$$

In realtà, conducendo il calcolo di  $\tilde{y}(t)$  per via analitica si evidenzia la presenza della sola AM/AM, la distorsione AM/PM  $\Phi[\cdot]$  risultando nulla per una qualunque funzione  $v(x)$  ad un sol valore. Forniamo ora una sintetica spiegazione del perché: il segnale di ingresso  $x(t)$  (in banda passante) è facilmente

ricavabile dalla (1.1) e vale:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} [\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}] \\ &= A(t) \cos(\Psi(t)) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\Psi(t) \triangleq \varphi(t) + 2\pi f_0 t \quad (1.3)$$

Consideriamo ora la funzione  $v(A \cos \Psi)$ , nelle due variabili  $A$  e  $\Psi$ : essa è periodica, rispetto a  $\Psi$ , con periodo  $2\pi$  ed è quindi sviluppabile in serie di Fourier

$$v(A \cos \Psi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l[A] e^{jl\Psi} \quad (1.4)$$

con i coefficienti dello sviluppo dati da

$$c_l[A] \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(A \cos \Psi) e^{-jl\Psi} d\Psi \quad (1.5)$$

Tale sviluppo vale qualunque valore assumano  $A$  e  $\Psi$ .

Considerando l'espressione del segnale  $y'(t)$  in uscita dalla non linearità  $v(x)$  (si veda la figura 1.4), e applicando le considerazioni precedenti, si ottiene per esso il seguente sviluppo

$$y'(t) = v[x(t)] = \quad (1.6)$$

$$= v[A(t) \cos \Psi(t)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l[A(t)] e^{jl\Psi(t)} \quad (1.7)$$

Dallo sviluppo (1.7) si hanno varie componenti spettrali (si veda la figura 1.4); ricordiamo che i termini esponenziali di tale sviluppo modulano i vari lobi dello spettro intorno a frequenze multiple della portante originaria  $f_0$ . Ognuno di tali lobi rappresenta lo spettro di un segnale il cui equivalente passabasso è

$$c_l[A(t)] e^{jl\varphi(t)} \quad (1.8)$$

e la cui occupazione spettrale, considerando la dipendenza istantanea da  $A(t)$ , è all'incirca uguale a quella di  $A(t)$  stesso. Possiamo quindi affermare che se  $x(t)$

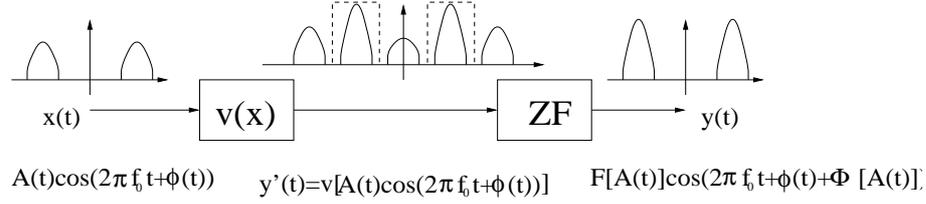


Figura 1.4: Uscita di BPNL con segnale in banda stretta

è un segnale in banda stretta ( $f_0$  molto maggiore della banda occupata) allora i vari lobi presenti nello spettro non si sovrappongono ed il filtraggio dovuto a ZF equivale alla eliminazione dei lobi modulati sulle armoniche della portante.

Il filtro di zona della non linearità passa-banda sopprime quindi tutti gli addendi dello sviluppo (1.7), salvo quelli relativi a  $l = \pm 1$ . Dai due addendi restanti si può facilmente calcolare l'involuppo complesso dell'uscita  $y(t)$

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}(t) &= 2c_1(A(t))e^{j\varphi(t)} \\
 F[A]e^{j\Phi[A]} &\triangleq 2c_1(A) \\
 &\triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(A \cos \Psi) \cos \Psi d\Psi - j \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(A \cos \Psi) \sin \Psi d\Psi \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Si è quindi dimostrata anche la relazione (1.2), giustificata in precedenza in base a considerazioni intuitive. È evidente come, concordemente a quanto si è anticipato, la (1.9) fornisce un valore reale in tutti i casi in cui  $v(x)$  è ad un sol valore: il secondo addendo risulta infatti nullo, essendo l'integrale di una funzione dispari di  $\Psi$  su un intervallo pari (data la periodicità, l'integrale può equivalentemente estendersi da  $-\pi$  a  $\pi$ ). In tutti questi casi la relazione (1.9) si semplifica nella seguente relazione, nota in letteratura come *trasformata di Chebychev* della funzione  $v(x)$  [2]

$$F[A] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(A \cos \Psi) \cos \Psi d\Psi \quad (1.10)$$

Per ammettere l'esistenza di una  $\Phi[\cdot]$  non nulla, come sperimentalmente si rileva, occorre adottare per la BPNL un modello piú complesso, cosí come

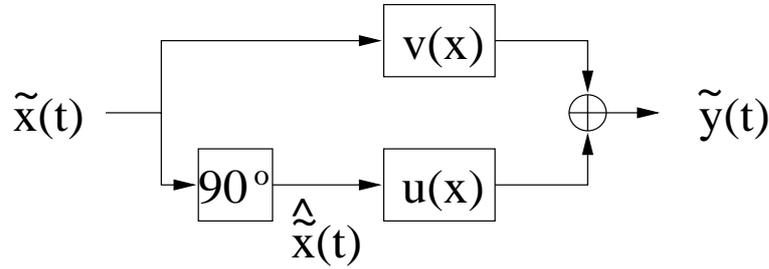


Figura 1.5: Modello parallelo di BPNL

proposto in [3]. Tale *modello parallelo*, rappresentato in figura 1.5, adottato anche in [1], prevede la presenza di due BPNL istantanee,  $v(x)$  e  $u(x)$ . Ciascuna di esse causa, come detto, il solo effetto di AM/AM: l'una sul segnale  $\tilde{x}(t)$  (ramo *in fase*) e l'altra sulla trasformata di Hilbert  $\hat{\tilde{x}}(t)$  dello stesso segnale (ramo *in quadratura*). L'effetto complessivo è la presenza di entrambe le distorsioni non lineari (AM/AM ed AM/PM) in funzione delle caratteristiche AM/AM delle non linearità  $v(x)$  e  $u(x)$  dei due rami, che indichiamo con  $F_v[\cdot]$  e  $F_u[\cdot]$  rispettivamente; analiticamente

$$\begin{aligned} F(A) &= |F_v(A) + jF_u(A)| \\ \Phi(A) &= \arg(F_v(A) + jF_u(A)) \end{aligned}$$

La considerazione da cui muove tale modello è piuttosto semplice. Avendosi

$$\begin{aligned} y(t) &= F[A(t)] \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t) + \Phi[A(t)]) \\ &= F[A(t)] \cos(\Phi[A(t)]) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \\ &\quad - F[A(t)] \sin(\Phi[A(t)]) \sin(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \end{aligned} \quad (1.11)$$

la relazione (1.11) è facilmente ricavabile dalla espressione (1.2) di  $\tilde{y}(t)$  e coincide con l'uscita del modello di figura 1.5, laddove si scelgano le BPNL dei due rami in modo che le rispettive funzioni di conversione AM/AM soddisfino le seguenti equazioni

$$F_v[A] = F[A] \cos(\Phi[A])$$

$$F_u[A] = F[A] \sin(\Phi[A]) \quad (1.12)$$

Al fine di risolvere l'ambiguità generata dalla non rilevabilità analitica dell'effetto AM/PM di una singola BPNL, tuttavia sperimentalmente presente nei dispositivi reali, accenniamo al fatto che, se si prendono in considerazione caratteristiche non lineari  $v(x)$  con isteresi ([4] cap. 2), il termine immaginario della (1.9), che non è presente nella *trasformata di Chebychev* (1.10), risulta non nullo. Tale termine, che è nullo per funzioni  $v(x)$  ad un sol valore, dà invece un contributo non nullo nel caso di caratteristiche con isteresi, dovendo l'integrale svilupparsi secondo il *circuito chiuso* descritto dalla caratteristica. Le caratteristiche con isteresi sono tipiche dei materiali ferromagnetici e consentono di dare una giustificazione teorica ad un fenomeno altrimenti rilevabile solo sperimentalmente. Al di là della realtà fisica dei dispositivi, continueremo comunque a riferirci al *modello parallelo*, che evidenzia entrambe le caratteristiche di conversione pur mantenendo una adeguata trattabilità analitica (non coinvolge funzioni a più valori).

### 1.2.2 Non linearità polinomiali

Prendiamo ora in esame il caso di funzioni non lineari  $v(x)$  esprimibili in forma polinomiale, al fine di dare una espressione esplicita del segnale di uscita che dipenda dai parametri della funzione, cioè dai coefficienti del polinomio. Tale espressione ha il vantaggio di essere analiticamente semplice e gode nel contempo di generalità, essendo di norma sempre possibile esprimere una generica caratteristica mediante sviluppo in serie di McLaurin.

Supponiamo da principio di limitarci ad un singolo monomio, ovvero poniamo

$$v(x) = \alpha x^l \quad (1.13)$$

Se esprimiamo il segnale di ingresso  $x(t)$  mediante il suo involuppo complesso

$$x(t) = \frac{1}{2} [\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t} + \tilde{x}^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}] \quad (1.14)$$

possiamo calcolare  $v(x(t))$  mediante sviluppo del binomio di Newton

$$v(x(t)) = \alpha \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} [\tilde{x}(t)]^k [\tilde{x}^*(t)]^{l-k} e^{j2\pi(2k-l)f_0 t} \quad (1.15)$$

Notiamo che in tale equazione la presenza del filtro di zona elimina tutte le componenti della sommatoria tranne quelle per cui  $(2k - l) = \pm 1$ . Ne segue che per  $l$  pari, l'uscita  $y(t)$  è identicamente nulla, non potendosi mai verificare la suddetta condizione. Per  $l$  dispari esistono due addendi non nulli e il segnale di uscita risulta

$$\begin{aligned} y(t) = & \alpha \frac{1}{2^l} \left[ \binom{l}{\frac{l+1}{2}} [\tilde{x}(t)]^{\frac{l+1}{2}} [\tilde{x}^*(t)]^{\frac{l-1}{2}} e^{j2\pi f_0 t} \right. \\ & \left. + \binom{l}{\frac{l-1}{2}} [\tilde{x}(t)]^{\frac{l-1}{2}} [\tilde{x}^*(t)]^{\frac{l+1}{2}} e^{-j2\pi f_0 t} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

da cui, notando che i due binomiali sono uguali e che  $[\tilde{x}(t)]^{\frac{l+1}{2}} [\tilde{x}^*(t)]^{\frac{l-1}{2}} = \tilde{x}(t)|\tilde{x}(t)|^{l-1}$  (e analogamente per il suo coniugato) si ricava l'involuppo complesso del segnale di uscita

$$\tilde{y}(t) = \frac{\alpha}{2^{l-1}} \binom{l}{\frac{l+1}{2}} \tilde{x}(t)|\tilde{x}(t)|^{l-1} \quad (1.17)$$

che, usando la (1.1), si può esprimere anche in funzione di modulo e fase di  $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{y}(t) = \frac{\alpha}{2^{l-1}} \binom{l}{\frac{l+1}{2}} A(t)^l e^{j\varphi(t)} \quad (1.18)$$

Come preannunciato, la fase di  $\tilde{y}(t)$  è identica a quella di  $\tilde{x}(t)$ , non vi è cioè conversione AM/PM.

È ora naturale estendere il risultato ad un polinomio di ordine  $2N + 1$ ; per la condizione enunciata sopra, solo i coefficienti di ordine dispari del polinomio contribuiscono al segnale di uscita  $y(t)$ . Ponendo  $l = 2m + 1$  otteniamo dalla (1.17)

$$\tilde{y}(t) = \frac{\alpha}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} \tilde{x}(t)|\tilde{x}(t)|^{2m} \quad (1.19)$$

Considerando ora una non linearità polinomiale

$$v(x) = \sum_{l=0}^{2N+1} \alpha_l x^l \quad (1.20)$$

otteniamo la seguente relazione ingresso-uscita (in banda base)

$$\tilde{y}(t) = \left[ \sum_{m=0}^N \alpha_{2m+1} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} |\tilde{x}(t)|^{2m} \right] \tilde{x}(t) \quad (1.21)$$

da cui è semplice ricavare una espressione esplicita della caratteristica di conversione AM/AM  $F_v[\cdot]$ .

I ragionamenti esposti finora rappresentano risultati noti riguardo alle BPNL polinomiali [1] con sola conversione AM/AM. Al fine di sviluppare un modello polinomiale che tenga conto anche della conversione AM/PM riprendiamo in esame il modello parallelo di figura 1.5 e supponiamo entrambe le BPNL dei due rami approssimabili da due polinomi di grado  $2N+1$ , con coefficienti rispettivamente  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ . Osservando che l'involuppo complesso del segnale  $\hat{x}(t)$  in ingresso ad  $u(x)$  vale

$$\tilde{x}(t) = j\hat{x}(t) \quad (1.22)$$

e applicando la relazione (1.21) anche al ramo inferiore del modello, si ottiene complessivamente per l'uscita

$$\tilde{y}(t) = \left[ \sum_{m=0}^N \gamma_{2m+1} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m+1}{m} |\tilde{x}(t)|^{2m} \right] \tilde{x}(t) \quad (1.23)$$

in cui si sono introdotti i coefficienti complessi  $\gamma_i$  così definiti

$$\gamma_{2m+1} \triangleq \alpha_{2m+1} + j\beta_{2m+1} \quad (1.24)$$

Otteniamo così una relazione polinomiale tra ingresso ed uscita, del tutto analoga a quella che caratterizza una BPNL polinomiale a coefficienti reali (sola AM/AM), dove però la conversione AM/PM è tenuta in conto dal fatto che i coefficienti  $\gamma_i$  sono complessi.

### 1.2.3 Sviluppo polinomiale di BPNL caratterizzate sperimentalmente

Il vantaggio di rappresentare le BPNL in forma polinomiale consiste nell'ottenere una relazione tra ingresso ed uscita, espressa dalla (1.23), relativamente semplice e per di piú adattabile a diversi gradi di approssimazione, a seconda di quanti termini si considerano nello sviluppo.

Tale vantaggio era prevedibile a priori per mezzo della teoria generale delle *trasformate di Chebichev* [2]; è noto infatti che questa è un operatore lineare e per di piú **trasforma monomi in monomi**. Sussiste difatti la relazione:

$$\begin{aligned}
 v(x) &= x^n \\
 F_v[A] &= \begin{cases} 2 \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{A}{2}\right)^n & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases} \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

dalla quale sarebbe stato possibile ricavare la (1.21) in modo alternativo. Si noti che i monomi non sono le uniche autofunzioni dell'operatore trasformata di Chebychev; ve ne sono altre, ad esempio le funzioni di Bessel. Per le funzioni polinomiali, in particolare, è stato possibile ricavare una espressione delle funzioni di conversione non lineari, dimostrata nel paragrafo precedente, svincolata dalla teoria della trasformata di Chebychev.

Supponiamo ora di avere delle curve assegnate di AM/AM ed AM/PM sperimentalmente determinate; ci proponiamo di determinare i coefficienti  $\gamma_i$  della BPNL complessa che meglio approssima le curve date. Confrontando l'espressione (1.2) con la (1.23) procediamo alla minimizzazione dell'errore quadratico medio (EQM) che vi è tra la curva complessa  $F[A]e^{j\Phi[A]}$ , che riassume entrambi gli effetti della non linearità, e la sua rappresentazione approssimata. Tale EQM va calcolato sull'intervallo  $[0; A_{max}]$  in cui è assegnato l'andamento delle curve

e risulta dunque

$$\varepsilon \triangleq \frac{1}{A_{max}} \int_0^{A_{max}} \left| \sum_{m=0}^N \gamma_{2m+1} 2 \binom{2m+1}{m} \left(\frac{A}{2}\right)^{2m+1} - F[A] e^{j\Phi[A]} \right|^2 dA \quad (1.26)$$

La minimizzazione dell'EQM si ottiene azzerando le derivate della (1.26) rispetto alle variabili  $\gamma_i$ . Definendo la matrice  $\mathbf{C}$  di elementi

$$C_{ij} \triangleq \int_0^{A_{max}} \left[ 2 \binom{2j+1}{j} \left(\frac{A}{2}\right)^{2j+1} \right] A^{2i+1} dA \quad (1.27)$$

ed il vettore  $\mathbf{g}$  di elementi

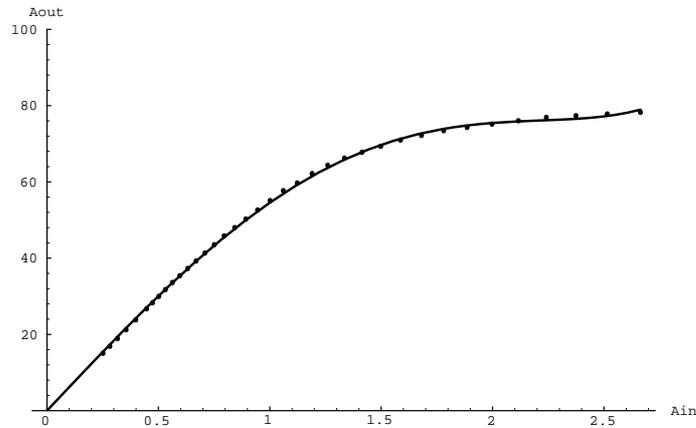
$$g_i \triangleq \int_0^{A_{max}} F[A] e^{j\Phi[A]} A^{2i+1} dA \quad (1.28)$$

ed indicando con  $\gamma$  il vettore dei coefficienti, si perviene al sistema

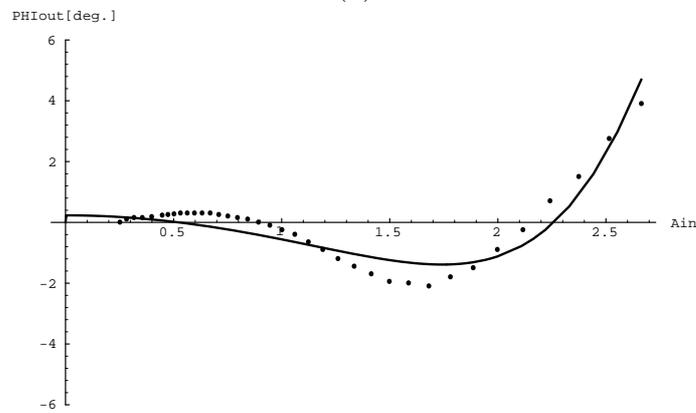
$$\mathbf{C}\gamma = \mathbf{g} \quad (1.29)$$

che dalla teoria della approssimazione polinomiale di funzioni risulta essere sempre **non singolare** (si veda [5], cap.15), essendo la matrice  $\mathbf{C}$  decomponibile in una forma  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , in cui  $\mathbf{A}$  è un'opportuna matrice, definita positiva. Se le curve  $F[\cdot]$  e  $\Phi[\cdot]$  vengono assegnate per punti, le espressioni dell'EQM, e del sistema (1.29) che lo minimizza, possono essere modificate opportunamente. È stato sviluppato un programma di elaborazione che, una volta assegnata una tabella di punti misurati per le curve di conversione AM/AM ed AM/PM, consente il calcolo del vettore  $\gamma$ , di dimensione assegnata a piacere, caratterizzante la BPNL polinomiale complessa che meglio approssima (nel senso dell'EQM minimo) la BPNL assegnata.

La figura 1.6 mostra un esempio di approssimazione delle curve AM/AM e AM/PM ottenute mediante misura sperimentale per punti da un amplificatore a semiconduttore operante nella banda 11,2-11,7 GHz, i cui dati sono stati forniti dalla Italtel S.p.A. (cod. 606-037/76B), avendo scelto un polinomio complesso di grado 5 per l'approssimazione. Il grafico 1.6 (a) mostra, per la curva AM/AM,



(a)



(b)

$$\gamma_1 = 62.09 + j0.25 \quad \gamma_3 = -10.71 - j1.28 \quad \gamma_5 = 0.78 + j0.29$$

Figura 1.6: Esempio di approssimazione di curve misurate, con BPNL polinomiale (ordine 5). (a) AM/AM (b) AM/PM

un'ottima consonanza tra i dati misurati (visualizzati per punti) e la curva approssimante (visualizzata a tratto pieno). La curva relativa alla AM/PM approssima le oscillazioni dei punti misurati, intorno all'asse  $A_{in}$ : ciò a causa del grado limitato del polinomio approssimante. Un'ultima osservazione riguarda il fatto che generalmente si ha  $\Phi[0] = 0$  nella curva AM/PM, mentre nel nostro

modello si ottiene, dalla (1.23),  $\Phi[0] = \arg(\gamma_1)$ , come visibile in figura 1.6 (b). Si può imporre la condizione  $\Phi[0] = 0$  forzando  $\beta_1 = 0$ . In tal caso il sistema (1.29), che è a variabili e termini noti complessi e quindi separabile nella risoluzione congiunta di due sistemi reali, vede il secondo di tali sistemi reali privato di una variabile (la  $\beta_1$ ), ma con lo stesso numero di equazioni; poiché la matrice  $\mathbf{C}$  è a rango pieno (non-singolare), il sistema è comunque risolubile.

### 1.3 Modello in banda-base del canale non lineare

Nei paragrafi precedenti abbiamo ricavato una relazione tra le rappresentazioni equivalenti in banda base (involuppi complessi) dei segnali di ingresso ed uscita di una non linearità polinomiale complessa. Abbiamo poi mostrato come ricavare i coefficienti di tale modello polinomiale a partire da curve di conversione AM/AM ed AM/PM assegnate. Siamo ora in grado di trasporre il modello di figura 1.1 in un modello equivalente in banda-base. Assumeremo, per semplicità di esposizione, che la non linearità sia adeguatamente approssimabile da un polinomio cubico, sebbene i risultati siano immediatamente estendibili al caso di un polinomio di grado  $2N + 1$  con  $N > 1$ ; nella sommatoria dell'espressione (1.23) compariranno quindi soltanto due addendi. In particolare, sviluppando i calcoli, essa diviene:

$$\tilde{y}(t) = \gamma_1 \tilde{x}(t) + \frac{3}{4} \gamma_3 \tilde{x}(t) |\tilde{x}(t)|^2 \quad (1.30)$$

Rimane però inteso che il modello ha validità generale, essendo sempre possibile estendere la relazione (1.30) con l'aggiunta di termini superiori al terzo; anche le relazioni che si stabiliranno in seguito, benché arrestate al terzo ordine per convenienza di notazione, sono concettualmente estendibili, qualora il modello di BPNL polinomiale sia sviluppato fino all'ordine  $2N + 1$  ( $N > 1$ ).

Da quanto detto finora siamo in grado di costruire il modello equivalente passa-basso del modello passa-banda di figura 1.1, rappresentato in figura 1.7.

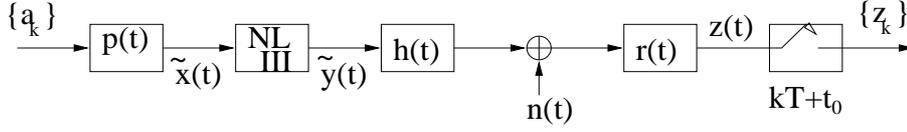


Figura 1.7: Modello banda-base di canale NL

In tale modello, sfruttando la relazione (1.30), possiamo ricavare una espressione per il segnale  $z(t)$  in uscita dal filtro di ricezione. Il campionario che estrae i campioni  $z_k \triangleq z(kT + t_0)$  è implicitamente supposto con periodo pari all'intervallo di simbolo  $T$  e istante  $t_0$ ; rimuoveremo in seguito questa ipotesi introducendo un sovracampionamento di ordine  $\sigma$ ; il campionario estrarrà quindi un campione ogni intervallo  $T/\sigma$ .

Se il segnale trasmesso è

$$\tilde{x}(t) = \sum_n a_n p(t - nT) \quad (1.31)$$

il filtro di ricezione  $r(t)$ , per ora generico (ne verrà specificata in seguito la risposta impulsiva), in cascata con il canale  $h(t)$  produce un sistema lineare con risposta impulsiva

$$h'(t) = h(t) * r(t) \quad (1.32)$$

il segnale in uscita dal filtro di ricezione è quindi

$$\begin{aligned} z(t) &= \tilde{y}(t) * h'(t) = \\ &= \gamma_1 \sum_n a_n \int h'(t - \tau) p(\tau - nT) d\tau \\ &+ \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l a_i a_j a_l^* \int h'(t - \tau) p(\tau - iT) p(\tau - jT) p^*(\tau - lT) d\tau \\ &+ w(t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

dove gli integrali devono estendersi da  $-\infty$  a  $+\infty$ ,  $w(t)$  è il rumore filtrato dal filtro di ricezione

$$w(t) \triangleq n(t) * r(t) \quad (1.34)$$

ed  $n(t)$  è l'equivalente passa-basso del rumore termico supposto bianco gaussiano con densità spettrale di potenza  $\frac{N_0}{2}$  (passa-banda).

Ponendo

$$f(t) \triangleq \int h'(\tau)p(t - \tau)d\tau \quad (1.35)$$

$$\rho(t_1, t_2, t_3) \triangleq \int h'(\tau)p(t_1 - \tau)p(t_2 - \tau)p^*(t_3 - \tau)d\tau \quad (1.36)$$

possiamo esprimere il segnale  $z(t)$  nella forma

$$z(t) = \gamma_1 \sum_n a_n f(t - nT) + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l a_i a_j a_l^* \rho(t - iT, t - jT, t - lT) + w(t) \quad (1.37)$$

Queste espressioni dell'osservabile tempo-continuo  $z(t)$  hanno il pregio di separare il termine del terzo ordine da quello del primo, che è l'unico presente nel caso di sistema lineare.

Un sistema non lineare del tipo descritto, costituito dalla cascata di filtri lineari con una non linearità senza memoria, è noto in letteratura come *sistema di Volterra* [6] ed è caratterizzato dai propri *nuclei di Volterra*, che svolgono un ruolo analogo a quello svolto dalla risposta impulsiva per i sistemi lineari. I nuclei di Volterra, del I e III ordine del sistema di figura 1.7 possono essere identificati nei primi due addendi della (1.33) ed hanno rispettivamente la seguente espressione

$$\begin{aligned} v_1(t) &\triangleq \gamma_1 f(t) \\ v_3(t_1, t_2, t_3) &\triangleq \frac{3}{4} \gamma_3 \rho(t_1, t_2, t_3) \end{aligned}$$

Nel seguito utilizzeremo le funzioni  $f(t)$  e  $\rho(t_1, t_2, t_3)$ , proporzionali ai nuclei di Volterra, in quanto consentono di separare il contributo dell'elemento non lineare (coefficienti  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$ ) da quello dei filtri lineari.

In uscita dal campionatore con periodo uguale all'intervallo di simbolo, e istante  $t_0 \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  rappresentativo degli effetti della sincronizzazione di simbolo, troviamo il segnale a tempo discreto  $z_k$  per il quale possiamo dare la

seguinte espressione esplicita

$$z_k = z(kT + t_0) = \gamma_1 \sum_n a_n f_{k-n} + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l a_i a_j a_l^* \rho_{k-i, k-j, k-l} + w_k \quad (1.38)$$

in cui

$$f_n \triangleq f(nT + t_0) = \int h'(\tau) p(nT + t_0 - \tau) d\tau \quad (1.39)$$

sono, a meno del coefficiente  $\gamma_1$ , i campioni del nucleo di Volterra del primo ordine,  $v_1(t)$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{ijl} &\triangleq \rho(iT + t_0, jT + t_0, lT + t_0) \\ &= \int h'(\tau) p(iT + t_0 - \tau) p(jT + t_0 - \tau) p^*(lT + t_0 - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.40)$$

sono, a meno del coefficiente  $\frac{3}{4} \gamma_3$ , i campioni del nucleo del terzo ordine  $v_3(t_1, t_2, t_3)$  e

$$w_n \triangleq w(nT + t_0) \quad (1.41)$$

sono i campioni del rumore termico  $w(t)$  filtrato dal filtro di ricezione.

Gli  $f_n$ , proporzionali al campionamento del nucleo di Volterra del I ordine, sono i **parametri di dispersione del canale**, analiticamente identici a quelli che si otterrebbero dal canale in esame se non vi fosse distorsione del terzo ordine. I coefficienti  $\rho_{ijl}$  possono essere visti, analogamente, come **parametri di dispersione del terzo ordine**. Del calcolo di questi ultimi ci occuperemo nel prossimo paragrafo ma possiamo fare fin da ora la seguente congettura:

*Se il canale lineare, ottenuto omettendo l'elemento NL dalla figura 1.7, ha lunghezza di dispersione finita, allora anche il corrispondente canale non lineare ha la stessa lunghezza di dispersione.*

A tal riguardo osserviamo che

- $p(t)$ ,  $h(t)$  e  $r(t)$  possono essere dei filtri arbitrari;

- per lunghezza di dispersione finita si intende alternativamente che essa sia *strettamente finita* (ma in questo caso lo spettro si suppone illimitato) oppure *praticamente finita* secondo un qualche criterio (in questo caso la banda può essere strettamente limitata).

Diamo una giustificazione della congettura. Se supponiamo i coefficienti  $f_n$  non nulli solo per  $n$  che cade in un intervallo  $[-L_1; L_2]$ , ciò vuol dire che l'integrando della (1.39) diventa identicamente nullo quando  $h'$  e  $p$  sono reciprocamente traslati, sull'asse  $\tau$ , di una quantità maggiore di  $L_2T$  o minore di  $-L_1T$ . Ciò vale, a maggior ragione, per la legge di annullamento del prodotto, nel caso della (1.40). Possiamo quindi aspettarci che i coefficienti  $\rho_{ijl}$  siano nulli quando uno o più degli indici  $i, j, l$  sono esterni all'intervallo  $[-L_1; L_2]$ . Questo risultato verrà verificato per via numerica nel prossimo paragrafo.

### 1.3.1 Calcolo dei parametri di dispersione non lineari

È stata data, nelle equazioni (1.39) e (1.40), una espressione in forma integrale dei parametri di dispersione del canale, separando la parte lineare da quella non lineare. Per quanto riguarda la parte lineare, il calcolo degli  $f_n$  può venire condotto nel dominio della frequenza, ricordando la definizione di  $f(t)$  data nella (1.35) la cui trasformata di Fourier è

$$F(f) \triangleq \mathcal{F}[f(t)] = H'(f)P(f) \quad (1.42)$$

in cui, con ovvia notazione,  $H'(f)$  è la funzione di trasferimento totale del canale fisico e del filtro di ricezione mentre  $P(f)$  è la funzione di trasferimento del filtro di trasmissione. Si ha quindi infine

$$f_n = f(nT + t_0) = \mathcal{F}^{-1}[H'(f)P(f)]|_{t=nT+t_0} \quad (1.43)$$

Il calcolo della  $\mathcal{F}^{-1}$  può essere effettuato con algoritmi di *trasformata veloce di Fourier* (Fast Fourier Transform, FFT) inversa che agiscono sui campioni della funzione di trasferimento totale del canale  $F(f)$ , estratti in un intervallo

di frequenza pari a  $\Delta f = \frac{1}{T}$  (inverso della spaziatura dei campioni nel tempo) con spaziatura  $\Delta_f = \frac{1}{\Delta t}$  (inverso della durata di  $f(t)$  nel tempo) [7].

Ricaveremo ora una analoga espressione per la parte non lineare del canale, ma prima ricordiamo una proprietà che vale per la convoluzione multipla di funzioni di più variabili, esemplificandola nel caso, di nostro interesse, di tre variabili. Date due funzioni di tre variabili  $x(t_1, t_2, t_3)$  e  $y(t_1, t_2, t_3)$  si dice convoluzione multipla l'integrale

$$x(t_1, t_2, t_3) * y(t_1, t_2, t_3) = \int \int \int x(\beta, \alpha, \gamma) y(t_1 - \beta, t_2 - \alpha, t_3 - \gamma) d\beta d\alpha d\gamma \quad (1.44)$$

Dette  $X(f_1, f_2, f_3)$  e  $Y(f_1, f_2, f_3)$  le trasformate di Fourier tridimensionali di tali funzioni

$$\begin{aligned} X(f_1, f_2, f_3) &\triangleq \mathcal{F}_3[x(t_1, t_2, t_3)] = \int \int \int x(t_1, t_2, t_3) e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 \\ Y(f_1, f_2, f_3) &\triangleq \mathcal{F}_3[y(t_1, t_2, t_3)] = \int \int \int y(t_1, t_2, t_3) e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 \end{aligned}$$

è facile mostrare che

$$x(t_1, t_2, t_3) * y(t_1, t_2, t_3) = \mathcal{F}_3^{-1}[X(f_1, f_2, f_3)Y(f_1, f_2, f_3)] \quad (1.45)$$

Si può applicare la relazione precedente per ottenere una espressione dei  $\rho_{ijl}$  nel dominio della frequenza, in modo analogo a quanto fatto nella (1.43) per i coefficienti  $f_n$ , procedendo come segue. Ponendo

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2, t_3) &\triangleq h'(t_1)\delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3) \\ y(t_1, t_2, t_3) &\triangleq p(t_1)p(t_2)p^*(t_3) \end{aligned}$$

le rispettive trasformate di Fourier risultano

$$\begin{aligned} X(f_1, f_2, f_3) &= \int \int \int h'(t_1)\delta(t_1 - t_2)\delta(t_1 - t_3) e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= \int h'(t_1) e^{-j2\pi(f_1 + f_2 + f_3)t_1} dt_1 = H'(f_1 + f_2 + f_3) \\ Y(f_1, f_2, f_3) &= \int \int \int p(t_1)p(t_2)p^*(t_3) e^{-j2\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3)} dt_1 dt_2 dt_3 \\ &= P(f_1)P(f_2)P^*(-f_3) \end{aligned}$$

Dalla definizione (1.36) la funzione  $\rho(t_1, t_2, t_3)$  può essere interpretata come convoluzione multipla di  $x(t_1, t_2, t_3)$  e  $y(t_1, t_2, t_3)$ , infatti

$$\begin{aligned}\rho(t_1, t_2, t_3) &= x(t_1, t_2, t_3) * y(t_1, t_2, t_3) & (1.46) \\ &= \int \int \int h'(\beta) \delta(\beta - \alpha) \delta(\beta - \gamma) p(t_1 - \beta) p(t_2 - \alpha) p^*(t_3 - \gamma) d\beta d\alpha d\gamma \\ &= \int h'(\beta) p(t_1 - \beta) p(t_2 - \beta) p^*(t_3 - \beta) d\beta\end{aligned}$$

da cui risulta l'espressione cercata per i coefficienti  $\rho_{ijl}$

$$\begin{aligned}\rho_{ijl} &= x(t_1, t_2, t_3) * y(t_1, t_2, t_3) \Big|_{t_1=iT+t_0, t_2=jT+t_0, t_3=lT+t_0} & (1.47) \\ &= \mathcal{F}_3^{-1}[H'(f_1 + f_2 + f_3)P(f_1)P(f_2)P^*(-f_3)] \Big|_{t_1=iT+t_0, t_2=jT+t_0, t_3=lT+t_0}\end{aligned}$$

La funzione da antitrasformare è direttamente calcolabile, essendo note le funzioni di trasferimento dei blocchi  $P(f)$ ,  $H(f)$  e  $R(f)$  che compongono il canale; inoltre essa è limitata in banda in ognuna delle tre dimensioni  $f_i$ , nell'ipotesi che il filtro di trasmissione  $P(f)$  sia limitato in banda, ipotesi nella quale ci poniamo. La banda entro la quale  $P(f)$  è contenuta è importante, ai fini della antitrasformazione, per evitare fenomeni di sovrapposizioni spettrali (*aliasing*). Se, ad esempio,  $P(f)$  ha un fattore di eccesso di banda  $\alpha$ , rispetto alla metà della frequenza di segnalazione  $1/2T$ , allora ponendo

$$\Gamma(f_1, f_2, f_3) \triangleq \mathcal{F}_3[\rho(t_1, t_2, t_3)] = H'(f_1 + f_2 + f_3)P(f_1)P(f_2)P^*(-f_3) \quad (1.48)$$

si avrà

$$\Gamma(f_1, f_2, f_3) = 0 \quad \text{per } f_i \notin \left[-\frac{1+\alpha}{2T}; \frac{1+\alpha}{2T}\right] \quad (1.49)$$

Dovendo ottenere campioni  $\rho_{ijl}$  spazati di  $T$  (si veda la (1.47)), la funzione  $\Gamma$  andrà campionata da  $-\frac{1}{2T}$  a  $\frac{1}{2T}$  su ognuna delle tre frequenze (definendo così nello spazio tridimensionale delle frequenze un cubo di lato  $\frac{1}{T}$ ). Ma poiché  $\Gamma$  è contenuta in un cubo più grande (di lato  $\frac{1+\alpha}{T}$ ), i campioni  $\rho_{ijl}$  che si ottenengono dalla antitrasformazione sono affetti da aliasing. Occorre quindi, prima di campionare, sommare le repliche dello spettro  $\Gamma(f_1, f_2, f_3)$  in ognuna

delle tre dimensioni, traslandole di multipli di  $\frac{1}{T}$ . La limitatezza in banda di  $\Gamma$  assicura che il numero di tali repliche è finito.

È stato realizzato un programma che calcola i coefficienti di dispersione lineari e non lineari,  $f_n$  e  $\rho_{ijl}$ , a partire dai filtri presenti nel canale, impiegando un algoritmo di FFT inversa tridimensionale [7] e provvedendo alla eliminazione dei fenomeni di aliasing nel modo descritto sopra. Diamo, in appendice a questo capitolo, un esempio del calcolo dei coefficienti mediante tale programma, per un particolare canale che assume filtri di trasmissione e ricezione a radice di coseno rialzato e canale fisico  $h(t)$  in accordo al modello di Rummler [8].

Vi sono alcune osservazioni da fare su quanto si è appena esposto: in primo luogo esiste una simmetria dei parametri  $\rho_{ijl}$  rispetto alla permutazione degli indici, qualora la risposta impulsiva in banda-base del filtro di trasmissione  $p(t)$  sia reale, come di norma accade; in questo caso  $P(f)$  gode di *simmetria Hermitiana* ed è evidente dalla (1.48) che l'espressione di  $\Gamma(f_1, f_2, f_3)$  è invariante alla permutazione delle tre variabili  $f_i$ . Tale proprietà di simmetria viene conservata per gli indici  $i, j, l$ , nell'antitrasformazione, e per questo motivo è sufficiente determinare i valori dei soli coefficienti  $\rho_{ijl}$  per  $i \leq j \leq l$ . Una seconda osservazione riguarda l'ordine di grandezza di tali coefficienti  $\rho_{ijl}$ . Il fatto che, come si evince dai risultati del programma di calcolo mostrati di seguito, siano, in modulo, maggiori degli  $f_n$ , per diversi ordini di grandezza, è una conseguenza dell'aver assunto il guadagno complessivo del canale egualmente ripartito tra i filtri di trasmissione e ricezione; è ovvio, infatti, che, in un sistema lineare, la ripartizione del guadagno complessivo sui vari filtri che formano la cascata è irrilevante ai fini del calcolo degli  $f_n$ . Al contrario, nel sistema non lineare, è il guadagno del filtro  $p(t)$  ad influenzare maggiormente l'ordine di grandezza dei coefficienti  $\rho_{ijl}$ , ciò a causa della presenza del termine cubico del blocco NL.

Per dimostrare la correttezza di tali considerazioni (e quindi dei risultati visibili nel tabulato esposto in appendice a questo capitolo) seguiamo un ragionamento euristico: gli integrali di antitrasformazione che forniscono i parametri di canale,  $f_0$  e  $\rho_{000}$  (in un ricevitore simbolo per simbolo essi sono i parametri

“utili” mentre gli altri parametri rappresentano i coefficienti dell’intersimbolo), nell’ipotesi di  $p(t)$  reale e  $t_0 = 0$  hanno la seguente espressione

$$f_0 = \int R(f)H(f)P(f)df \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned} \rho_{000} &= \int \int \int R(f_1 + f_2 + f_3)H(f_1 + f_2 + f_3) \\ &\cdot P(f_1)P(f_2)P(f_3)df_1df_2df_3 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Gli integrali si estendono su una banda bilatera il cui ordine di grandezza è  $\frac{1}{T}$ ; se ammettiamo che il guadagno di  $H(f)$  abbia un ordine di grandezza unitario e che l’ordine di grandezza dei filtri  $P(f)$  ed  $R(f)$  sia invece  $\sqrt{T}$  (guadagno ugualmente ripartito sui due filtri), allora l’ordine di grandezza di  $f_0$  risulta dalla (1.50) pari ad uno, mentre dalla (1.51) si ha un ordine di grandezza di  $\frac{1}{T}$ , che nel nostro esempio è nell’ordine di  $10^8$ . Come si può controllare nell’output del programma, questo è proprio l’ordine di grandezza del parametro  $\rho_{000}$ .

Sembrerebbe quindi che in un canale non lineare la ripartizione del guadagno globale sui filtri di trasmissione e ricezione influenzi l’entità dell’intersimbolo non lineare. Enunciata in questi termini, l’osservazione è del tutto intuitiva: infatti, maggiore è il guadagno di  $P(f)$  e maggiore è la dinamica del segnale in ingresso alla non linearità, il che acuisce gli effetti di distorsione NL; spostando invece questo guadagno su  $R(f)$ , il segnale  $\tilde{x}(t)$  (figura 1.7) si mantiene in una dinamica piú ristretta e l’impiego dell’amplificatore NL si mantiene piú distante dalla saturazione. In realtà si deve tener presente che, data una certa caratteristica non lineare, i parametri  $\gamma_i$  del suo sviluppo polinomiale dipendono dalla dinamica di ingresso che si intende impiegare. Una volta fissata questa dinamica (e quindi i parametri  $\gamma_i$ ), il guadagno del filtro  $P(f)$  non può essere arbitrario, ma deve essere tale che la risposta impulsiva corrispondente,  $p(t)$ , abbia una dinamica compatibile con quella stabilita per l’ingresso della non linearità. Cambiare il guadagno di  $P(f)$  vuol dire cambiare la dinamica di ingresso della non linearità e quindi, in un certo senso, cambiare la caratteristica non lineare stessa, con la conseguenza che i coefficienti  $\gamma_i$  cambiano. Si può scegliere di normalizzare i guadagni dei filtri di trasmissione e ricezione in modo

che il guadagno di  $P(f)$  sia pari a  $T$  e quello di  $R(f)$  sia pari ad 1: in questo caso l'ordine di grandezza dei parametri  $f_n$  e  $\rho_{ijl}$  sarà il medesimo.

Nella figura 1.8 (b) è mostrato l'andamento del modulo dei parametri di dispersione dello stesso canale considerato nel programma di calcolo, relativi però, per ragioni di visualizzabilità, al termine di distorsione del II ordine (che, nel caso di BPNL è ininfluente). Il picco centrale rappresenta il coefficiente "utile"  $\rho_{00}$ , i picchi minori rappresentano gli ipotetici coefficienti di ISI del II ordine. Lo scopo della figura è di mostrare graficamente (confrontando la figura (a) con la (b)) la validità della congettura espressa nel paragrafo precedente, e cioè: **la lunghezza di dispersione del canale non lineare rimane invariata rispetto a quella del corrispondente canale lineare** (ottenuto omettendo il blocco BPNL). Tale risultato può essere riscontrato anche numericamente nei risultati del programma di calcolo riportati in appendice.

### 1.3.2 I coefficienti di dispersione nel caso di canale di Rummler

Vogliamo ora mostrare come, nel caso di canale  $h(t)$  di Rummler [8], sia possibile parametrizzare il calcolo dei coefficienti di dispersione  $f_n$  e  $\rho_{ijl}$  rispetto ai parametri  $a$  (attenuazione non selettiva),  $b$  (ampiezza del raggio riflesso) ed  $f_0$  (frequenza di *notch*) che, insieme al *ritardo di eco*  $\tau$ , caratterizzano tale canale.

Poiché, in caso di canale tempo-variante, può rendersi necessario il calcolo dei coefficienti di dispersione con diverse configurazioni del canale fisico, il metodo che introdurremo consente di ricalcolare i coefficienti  $f_n$  e  $\rho_{ijl}$ , al variare del canale, con una semplice operazione di combinazione lineare, permettendo un calcolo "off-line" delle antitrasformate (computazionalmente onerose) introdotte nel paragrafo precedente; queste ultime verranno a dipendere solo dalle risposte dei filtri di trasmissione e ricezione (invarianti nel tempo) e dal parametro  $\tau$ , che è, al più, soggetto ad un cambiamento di segno (valori negativi di  $\tau$  consentono

di modellare un canale a fase non-minima).

Come è noto [8], risposta impulsiva e funzione di trasferimento del canale di Rummler sono espresse dalle seguenti relazioni:

$$h(t) = a[\delta(t) - be^{j2\pi f_0\tau}\delta(t - \tau)] \quad (1.52)$$

$$H(f) = a[1 - be^{-j2\pi(f-f_0)\tau}] \quad (1.53)$$

Applicando la (1.52) alla relazione (1.32), che definisce  $h'(t)$ , si ottiene:

$$h'(t) = h(t) * r(t) = ar(t) - abe^{j\phi}r(t - \tau) \quad (1.54)$$

$$H'(f) = aR(f) - abe^{j\phi}R(f)e^{-j2\pi f\tau} \quad (1.55)$$

in cui si è posto

$$\phi \triangleq 2\pi f_0\tau \quad (1.56)$$

Sostituendo questa espressione di  $h'(t)$  nelle (1.35) (1.36) si ottiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \int h'(\beta)p(t - \beta)d\beta \\ &= a \int r(\beta)p(t - \beta)d\beta - abe^{j\phi} \int r(\beta - \tau)p(t - \beta)d\beta \\ \rho(t_1, t_2, t_3) &= \int h'(\beta)p(t_1 - \beta)p(t_2 - \beta)p^*(t_3 - \beta)d\beta \\ &= a \int r(\beta)p(t_1 - \beta)p(t_2 - \beta)p^*(t_3 - \beta)d\beta \\ &\quad - abe^{j\phi} \int r(\beta - \tau)p(t_1 - \beta)p(t_2 - \beta)p^*(t_3 - \beta)d\beta \end{aligned}$$

Con le posizioni

$$\begin{aligned} g(t) &\triangleq \int r(\beta)p(t - \beta)d\beta \\ \zeta(t_1, t_2, t_3) &\triangleq \int r(\beta)p(t_1 - \beta)p(t_2 - \beta)p^*(t_3 - \beta)d\beta \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} f(t) &= ag(t) - abe^{j\phi}g(t - \tau) \\ \rho(t_1, t_2, t_3) &= a\zeta(t_1, t_2, t_3) - abe^{j\phi}\zeta(t_1 - \tau, t_2 - \tau, t_3 - \tau) \end{aligned}$$

Si osservi che le trasformate di Fourier di  $g(t)$  e  $\zeta(t_1, t_2, t_3)$  sono rispettivamente

$$\begin{aligned} G(f) &\triangleq \mathcal{F}[g(t)] = R(f)P(f) \\ Z(f_1, f_2, f_3) &\triangleq \mathcal{F}_3[\zeta(t_1, t_2, t_3)] = R(f_1 + f_2 + f_3)P(f_1)P(f_2)P^*(-f_3) \end{aligned}$$

I coefficienti  $f_n$  e  $\rho_{ijl}$  possono ora essere espressi come

$$\begin{aligned} f_n &= f(nT + t_0) = af'_n - abe^{j\phi} f''_n & (1.57) \\ f'_n &\triangleq g(nT + t_0) = \mathcal{F}^{-1}[R(f)P(f)]|_{t=nT+t_0} \\ f''_n &\triangleq g(nT + t_0 - \tau) = \mathcal{F}^{-1}[R(f)P(f)]|_{t=nT+t_0-\tau} \\ \rho_{ijl} &= \rho(iT + t_0, jT + t_0, lT + t_0) = a\rho'_{ijl} - abe^{j\phi} \rho''_{ijl} & (1.58) \\ \rho'_{ijl} &\triangleq \zeta(iT + t_0, jT + t_0, lT + t_0) \\ &= \mathcal{F}_3^{-1}[R(f_1 + f_2 + f_3)P(f_1)P(f_2)P^*(-f_3)]|_{t_1=iT+t_0, t_2=jT+t_0, t_3=lT+t_0} \\ \rho''_{ijl} &\triangleq \zeta(iT + t_0 - \tau, jT + t_0 - \tau, lT + t_0 - \tau) \\ &= \mathcal{F}_3^{-1}[R(f_1 + f_2 + f_3)P(f_1)P(f_2)P^*(-f_3)]|_{t_1=iT+t_0-\tau, t_2=jT+t_0-\tau, t_3=lT+t_0-\tau} \end{aligned}$$

Solo per fare un esempio della utilità della parametrizzazione che si è introdotta, supponiamo di dover valutare l'equivalente discreto  $f_n$  di un canale lineare tempo variante, per diversi valori dei parametri di canale. Se i filtri di trasmissione e ricezione sono *a radice di coseno rialzato* allora il prodotto  $R(f)P(f)$  è un coseno rialzato e la funzione  $g(t)$  è un impulso di Nyquist, di cui si conosce analiticamente l'espressione; per ottenere  $f'_n$  basta campionare  $g(t)$  agli istanti  $nT + t_0$ , campionandola ad  $nT + t_0 - \tau$  si ottengono gli  $f''_n$ . Con una semplice combinazione lineare (1.57) si ottiene la risposta discreta del canale, avendo eliminato (in questo semplice esempio) ogni operazione di trasformazione. Al variare dei parametri di canale basta ricalcolare  $f'_n$  e  $f''_n$  semplicemente valutando  $g(t)$  negli istanti  $nT + t_0$  e  $nT + t_0 - \tau$ , in quanto in generale l'istante di campionamento  $t_0$  dipende anch'esso dai parametri del canale. L'estensione di queste considerazioni ai coefficienti  $\rho_{ijl}$  è subordinata alla possibilità di ricavare un'espressione analitica della funzione  $\zeta(t_1, t_2, t_3)$ .

### 1.3.3 Appendice

Esempio di risultato del programma di calcolo dei parametri di dispersione del canale NL  $f_n$  e  $\rho_{ijl}$

Risposta del canale su 32 campioni.

Tempo di simbolo T= 24.11 ns (1/T=41.472E+6)

Filtri di TX RX a rad. di coseno rialzato

con roll off alfa= 0.30

Canale di Rummmler con tau= 4.00 ns

f0=16.5888 MHz (=0.4/T) a=1 b= 0.90 (B=20 dB)

Parte lineare

Soglia di significativita':  $|f(n)| > 0.01|f(0)| = 0.409E-02$

f( -4)= -0.422E-02 +j -0.187E-02

f( -3)= 0.156E-01 +j 0.691E-02

f( -2)= -0.396E-01 +j -0.176E-01

f( -1)= 0.996E-01 +j 0.441E-01

f( 0)= 0.216E+00 +j -0.347E+00

f( 1)= -0.147E+00 +j -0.653E-01

f( 2)= 0.530E-01 +j 0.235E-01

f( 3)= -0.217E-01 +j -0.960E-02

f( 4)= 0.706E-02 +j 0.313E-02

Parte NL

Soglia di significativita':  $|ro(i,j,l)| > 0.01|ro(0,0,0)| = 0.140E+06$

ATTENZIONE: per ogni permutazione di indici i,j,l

si ha un coefficiente ro di ugual valore.

Si stampano solo per  $i \leq j \leq l$

ro( -4, -4, -4)= 0.156E+06 +j -0.337E+05

42CAPITOLO 1. MODELLO EQUIVALENTE IN BANDA BASE DI CANALI NON LINEARI

ro( -3, -3, -3)= -0.264E+05 +j 0.252E+06  
ro( -3, -3, -2)= 0.143E+06 +j -0.141E+05  
ro( -3, -2, -2)= 0.343E+06 +j -0.196E+05  
ro( -3, -1, -1)= 0.351E+06 +j -0.164E+05  
ro( -3, 0, 0)= -0.635E+05 +j 0.236E+06  
ro( -2, -2, -2)= -0.585E+06 +j -0.618E+06  
ro( -2, -2, -1)= -0.306E+06 +j 0.137E+06  
ro( -2, -2, 0)= 0.189E+06 +j -0.124E+06  
ro( -2, -1, -1)= -0.985E+06 +j 0.203E+06  
ro( -2, -1, 0)= -0.261E+06 +j 0.157E+06  
ro( -2, 0, 0)= -0.149E+06 +j -0.425E+06  
ro( -2, 0, 1)= 0.627E+05 +j -0.144E+06  
ro( -1, -1, -1)= 0.303E+07 +j 0.118E+07  
ro( -1, -1, 0)= 0.151E+07 +j -0.861E+06  
ro( -1, -1, 1)= -0.333E+06 +j 0.126E+06  
ro( -1, 0, 0)= 0.128E+07 +j 0.401E+06  
ro( -1, 0, 1)= -0.280E+06 +j 0.515E+06  
ro( -1, 0, 2)= 0.929E+05 +j -0.131E+06  
ro( -1, 1, 1)= 0.133E+05 +j 0.279E+06  
ro( 0, 0, 0)= 0.742E+07 +j -0.119E+08  
ro( 0, 0, 1)= -0.123E+07 +j -0.708E+06  
ro( 0, 0, 2)= 0.523E+06 +j -0.127E+06  
ro( 0, 0, 3)= -0.206E+06 +j 0.173E+06  
ro( 0, 1, 1)= -0.513E+05 +j -0.155E+07  
ro( 0, 1, 2)= 0.529E+05 +j 0.296E+06  
ro( 0, 2, 2)= 0.430E+05 +j -0.189E+06  
ro( 1, 1, 1)= -0.463E+07 +j -0.221E+07  
ro( 1, 1, 2)= 0.414E+06 +j 0.822E+06  
ro( 1, 1, 3)= -0.245E+06 +j -0.280E+06  
ro( 1, 2, 2)= -0.732E+05 +j 0.240E+06

$$\text{ro}( 2, 2, 2) = 0.144\text{E}+07 + j 0.279\text{E}+06$$

$$\text{ro}( 2, 2, 3) = -0.177\text{E}+06 + j -0.250\text{E}+06$$

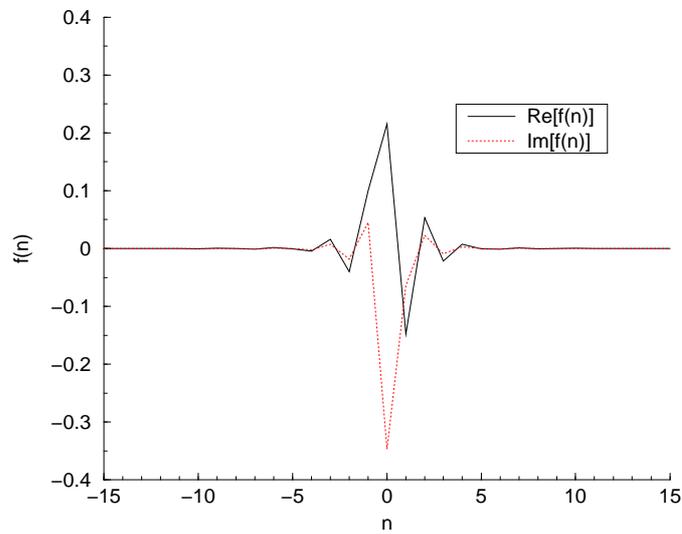
$$\text{ro}( 3, 3, 3) = -0.468\text{E}+06 + j 0.563\text{E}+05$$

Moduli massimi:

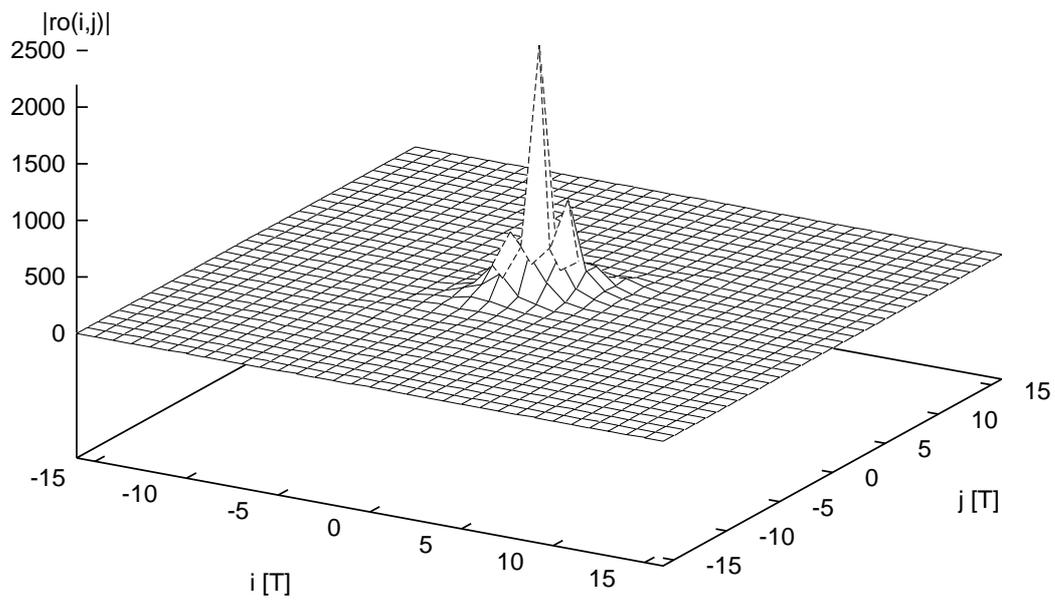
$$\text{ro}( 0, 0, 0) = 0.742\text{E}+07 + j -0.119\text{E}+08$$

$$\text{ro}( 1, 1, 1) = -0.463\text{E}+07 + j -0.221\text{E}+07$$

Il loro rapporto: 0.367



(a)



(b)

Figura 1.8: Modulo dei coefficienti di dispersione  $f_n$  (a) e  $\rho_{ij}$  (b)

## Capitolo 2

# Ricevitori a stima di sequenza per canali non lineari

### 2.1 Introduzione

Il problema del progetto di un ricevitore per canali non lineari è stato affrontato, nella letteratura esistente, a partire da punti di vista molto diversi fra loro. Tali punti di vista si differenziano essenzialmente per il modo in cui il canale non lineare è modellato, intendendo per canale l'insieme del dispositivo non lineare senza memoria e dei filtri lineari presenti su tutta la catena di trasmissione.

In questo capitolo deriveremo una struttura di ricevitore basata sul modello di canale non lineare esposto nel capitolo precedente. Prima di procedere a tale compito, diamo una illustrazione sintetica di quelle che ci sembrano le soluzioni più significative proposte in letteratura, evidenziando le differenze tra i diversi approcci ed il modo in cui i ricevitori proposti dipendono dalle proprietà del canale (ordine della non linearità, lunghezza di dispersione).

In [1], §10.5, viene proposto un ricevitore realizzato con un banco di filtri, ognuno seguito da un campionatore con periodo pari all'intervallo di simbolo; un processore di Viterbi (*Viterbi processor*, VP) effettua la stima di sequenza a massima verosimiglianza (*maximum likelihood sequence estimation*, MLSE) sui

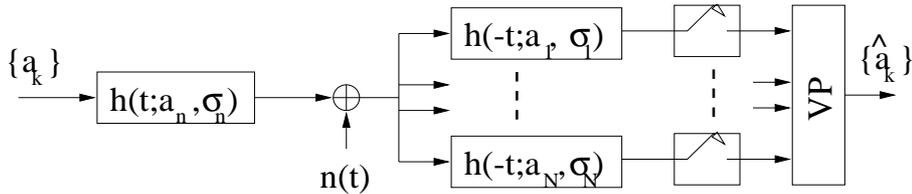


Figura 2.1: Ricevitore con filtri adattati ai “chips”

campioni osservabili. L'intero canale non lineare è visto come un modulatore non lineare con memoria (primo blocco della figura 2.1), che emette degli impulsi, detti “chip”, di durata  $T$ , il cui andamento nell'intervallo  $n$ -mo ( $h(t; a_n, \sigma_n)$ ) dipende dai simboli presenti nella memoria di canale ( $\sigma_n$ ) e dal simbolo corrente ( $a_n$ ) relativi allo stesso intervallo. I filtri del ricevitore sono filtri adattati ad ognuno dei chip possibili, al variare di  $a_n$  e  $\sigma_n$ . È evidente che se il canale ha memoria  $L$  saranno necessari  $M^{L+1}$  filtri adattati, dove  $M$  è la cardinalità dell'alfabeto di sorgente. Si dimostra che questo tipo di ricevitore è ottimo, nel senso che minimizza la probabilità di errore sulla sequenza.

Quello appena descritto è chiaramente un ricevitore basato su un approccio “di forza bruta”, il cui unico vantaggio è di disporre di un processore di Viterbi che lavora su metriche di ramo dipendenti in maniera semplice dai campioni osservabili. Per contro, gli svantaggi sono evidenti: un numero di filtri adattati che cresce in maniera esponenziale rispetto alla lunghezza di dispersione del canale con in più il problema di dover identificare analiticamente l'andamento delle funzioni chip. Il lavoro di Mesिया, McLane, Campbell [9] rappresenta l'applicazione di questo approccio al caso di un sistema BPSK.

Il lavoro di VanEtten-Van Vugt [10] segue invece un approccio diverso: esso è basato su un modello del canale non lineare come sistema di Volterra (*Volterra non linear system*, VNLS), caratterizzato dai nuclei di Volterra a cui si è accennato nel capitolo precedente. Nella figura 2.2 si assume che il canale sia schematizzabile da un sistema di Volterra del terzo ordine, caratterizzato quindi

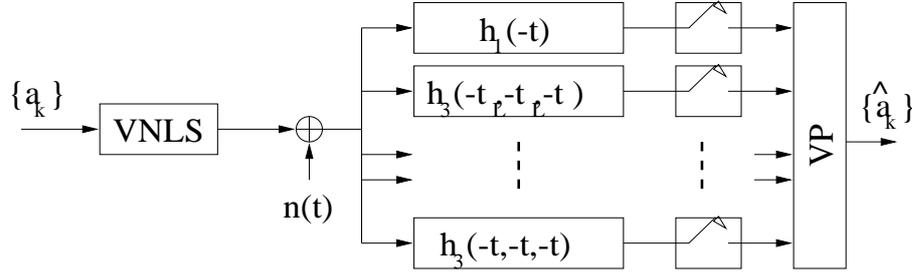


Figura 2.2: Ricevitore con filtri adattati ai nuclei di Volterra

dai nuclei  $h_1(\tau)$  e  $h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ . Il ricevitore è composto da un banco di filtri, il primo adattato al nucleo del primo ordine, gli altri adattati al nucleo del terzo ordine, considerato come funzione di una sola variabile ponendo  $\tau_3 = t$ ,  $\tau_2 = t_j \triangleq t - jT$ ,  $\tau_1 = t_i \triangleq t - iT$ , per  $i$  e  $j$  che scandiscono la lunghezza di dispersione del canale ( $i, j \in [0, L]$ ). I filtri sono seguiti da campionatori ad intervallo di simbolo i quali forniscono i campioni osservabili ad un processore di Viterbi che effettua la stima MLSE. Anche in questo caso si dimostra che il ricevitore minimizza la probabilità di errore sulla sequenza, avendo però il pregio, rispetto al ricevitore precedente, di sfruttare una descrizione analitica del canale non lineare; i nuclei di Volterra sono infatti calcolabili a partire dai parametri della non linearità e degli eventuali filtri presenti nel sistema. Questo fa sì che il numero di filtri adattati necessari sia “solo” polinomiale rispetto alla lunghezza di dispersione del canale. Se il canale ha lunghezza di dispersione  $L$  e il sistema VNLS è di ordine  $N$ , il numero totale di filtri necessari è  $O(L^{N-1})$ . All’opposto, il calcolo delle metriche di ramo nel VP è piuttosto complesso rispetto al caso del ricevitore con filtri adattati ai chip.

Tutte le soluzioni esaminate condividono la caratteristica di impiegare, al ricevitore, un gran numero di filtri adattati. Cercheremo, nei paragrafi che seguono, di superare questa difficoltà e di derivare un ricevitore ottimo, nel senso della MLSE, senza peraltro complicare, rispetto al caso di ricevitore per

canale lineare, le operazioni che il processore di Viterbi dovrà svolgere.

## 2.2 Ricevitore con campionamento ad intervallo di simbolo

In questo paragrafo, facendo riferimento alla figura 1.7, si affronterà il problema di realizzare un ricevitore che decida la sequenza di simboli ricevuta applicando la stima di sequenza a massima verosimiglianza sui campioni osservabili  $z_k$ . Si suppone che questi campioni vengano estratti dall'osservabile tempo-continuo  $z(t)$  con un campionatore operante con periodo uguale all'intervallo di simbolo, da cui  $z_k = z(kT + t_0)$  in cui  $t_0$  è rappresentativo dell'istante di sincronizzazione. Questa è evidentemente un'ipotesi restrittiva rispetto all'obiettivo di trattare l'osservabile tempo-continuo  $z(t)$  in maniera ottimale, in quanto il campionamento ad intervallo di simbolo non è in grado di recuperare tutta l'informazione che  $z(t)$  convoglia. Rimuoveremo nel paragrafo seguente l'ipotesi di campionamento con periodo  $T$ , introducendo nel ricevitore un fattore di sovracampionamento. Intendiamo per il momento prendere in esame il sistema con periodo di campionamento  $T$  come problema intermedio.

Disponiamo ora di tutti gli elementi che caratterizzano la risposta del canale non lineare di figura 1.7 e siamo in grado di calcolare l'osservabile tempo-discreto  $z_k$ , dato dalla espressione (1.38), in funzione dei simboli trasmessi e dei campioni di rumore. Inoltre, abbiamo dimostrato che tutti i parametri di dispersione (lineare e non lineare), che caratterizzano il canale non lineare, sono non nulli sullo stesso intervallo di indici, che supponiamo, senza perdita di generalità, estendersi da  $-L_1$  ad  $L_2$ . Riportiamo, per maggiore comodità, l'espressione degli  $z_k$ , precisando i limiti delle sommatorie (dopo aver cambiato l'indice di somma):

$$z_k = \gamma_1 \sum_{n=-L_1}^{L_2} f_n a_{k-n} + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_{i=-L_1}^{L_2} \sum_{j=-L_1}^{L_2} \sum_{l=-L_1}^{L_2} \rho_{ijl} a_{k-i} a_{k-j} a_{k-l}^* + w_k \quad (2.1)$$

Assumeremo, d'ora in avanti, che il filtro  $r(t)$  del ricevitore abbia trasformata  $R(f)$  tale che  $|R(f)|^2$  soddisfi il criterio di Nyquist, sia esso ad esempio un filtro a radice di coseno rialzato: poiché nella figura 1.7  $n(t)$  è un rumore additivo gaussiano bianco, ciò rende i **campioni di rumore  $w_k$  a distribuzione gaussiana e incorrelati** fra loro (quindi indipendenti). Notiamo nella (2.1) che il contributo dovuto al solo simbolo "attuale"  $a_k$  viene dai termini con  $n, i, j, l = 0$ ; gli altri termini rappresentano l'interferenza intersimbolica di simboli precedenti e seguenti  $a_k$ . Notiamo anche come nella stessa espressione sia evidente la presenza di interferenza tra il canale in-fase (parte reale dei simboli trasmessi) e quello in-quadratura (parte immaginaria degli  $a_k$ ): ciò è dovuto al fatto che i  $\gamma_i$  sono complessi (rotazione della costellazione trasmessa, a causa dell'effetto di AM/PM). Se i  $\gamma_i$  fossero reali e tali fossero anche i filtri  $p(t)$ ,  $h(t)$  e  $r(t)$  allora non si avrebbe interferenza tra i due canali, benché nell'addendo del terzo ordine vi sia il prodotto di più simboli complessi: questo sarebbe compensato dalle proprietà di simmetria dei coefficienti  $\rho_{ijl}$  (reali); gli  $f_n$  sarebbero anch'essi reali.

Abbiamo posto tutte le premesse (lunghezza di dispersione del canale finita; campioni di rumore incorrelati) per poter effettuare al ricevitore, dati gli osservabili  $z_k$ , una stima di sequenza a massima verosimiglianza con metodo analogo a quello proposto da Forney in [11] per canali lineari. A tal fine, trasmessa la sequenza  $\mathbf{a} \triangleq (a_1, a_2, \dots, a_K)^T$  di lunghezza finita, il vettore degli osservabili  $\mathbf{z} \triangleq (z_{-L_1+1}, z_{-L_1+2}, \dots, z_{K+L_2})^T$ , di lunghezza  $N \triangleq K + L_1 + L_2$  al fine di tenere conto degli effetti di memoria del canale, risulta essere, condizionatamente ad  $\mathbf{a}$ , **gaussiano a componenti incorrelate**. Essendo i campioni  $w_k$  gaussiani a valor medio nullo e con identica varianza  $\sigma_w^2$ , il valore medio del vettore, che chiameremo  $\mathbf{z}'(\mathbf{a})$ , ha come componenti:

$$z'_k(a_{k-L_2} \cdots a_k \cdots a_{k+L_1}) \triangleq \gamma_1 \sum_{n=-L_1}^{L_2} f_n a_{k-n} + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_{i=-L_1}^{L_2} \sum_{j=-L_1}^{L_2} \sum_{l=-L_1}^{L_2} \rho_{ijl} a_{k-i} a_{k-j} a_{k-l}^* \quad (2.2)$$

in cui si evidenzia la dipendenza dai simboli di ingresso. La stima di sequenza a

massima verosimiglianza prevede, al fine di minimizzare la probabilità di errore sulla sequenza, la massimizzazione, su tutte le possibili sequenze trasmesse, della funzione di densità di probabilità del vettore osservabile, condizionata alla trasmissione di una particolare sequenza. La sequenza che la massimizza verrà poi ad essere la sequenza stimata al ricevitore; in formule:

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \max_{\mathbf{a}} p(\mathbf{z}|\mathbf{a}) \quad (2.3)$$

Osserviamo che la densità di probabilità  $p(\cdot)$  è una gaussiana multidimensionale. Questo avviene grazie alla gaussianità dei campioni di rumore  $w_k$  (ad uguale varianza  $\sigma_w^2$ ). Il vettore degli osservabili dipende dal vettore dei campioni di rumore  $\mathbf{w}$ , definito in analogia con  $\mathbf{z}$ , nel modo seguente

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}'(\mathbf{a}) + \mathbf{w} \quad (2.4)$$

si possono quindi ottenere i valori del vettore medio e la matrice di covarianza del vettore osservabile  $\mathbf{z}$ , condizionatamente alla sequenza trasmessa

$$E\{\mathbf{z}|\mathbf{a}\} = \mathbf{z}'(\mathbf{a}) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{z}|\mathbf{a}} = E\{(\mathbf{z} - \mathbf{z}'(\mathbf{a}))(\mathbf{z} - \mathbf{z}'(\mathbf{a}))^H\} = \sigma_w^2 \mathbf{I} \quad (2.6)$$

Se si suppone il vettore osservabile ad  $N$  componenti, la densità di probabilità di  $\mathbf{z}$  condizionata alla sequenza trasmessa, che andrà massimizzata, è quindi data da

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{a}) = \frac{1}{(\pi\sigma_w^2)^N} e^{-\frac{|\mathbf{z} - \mathbf{z}'(\mathbf{a})|^2}{\sigma_w^2}} \quad (2.7)$$

La massimizzazione di  $p(\mathbf{z}|\mathbf{a})$  si riduce quindi alla minimizzazione dell'esponente della gaussiana; possiamo quindi stabilire la relazione

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_{k=-L_1+1}^{K+L_2} |z_k - z'_k(\mathbf{a})|^2 \right\} \quad (2.8)$$

La minimizzazione in oggetto può essere convenientemente effettuata mediante l'algoritmo di Viterbi [11], una volta definita la quantità da minimizzare

come metrica di percorso. Diamo di seguito le definizioni di *stato*, *transizione*, *metrica di ramo* e *metrica di percorso*, che sono identiche a quelle adottate nel caso di canale lineare, usando una notazione del tutto comprensibile a chi ha familiarità con l'algoritmo di Viterbi. Supponiamo, per semplicità di notazione, che la lunghezza di dispersione del canale si estenda, per il campione all'istante  $n$ , ai soli simboli  $a_{n-L} \cdots a_{n-1}$ , si definisce *stato* il seguente vettore

$$\sigma_n \triangleq (a_{n-L} \cdots a_{n-1}) \quad (2.9)$$

All'istante  $n + 1$  si ha una *transizione* di stato, identificata da tutti i simboli che definiscono gli stati stessi

$$(\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1}) = (a_{n-L} \cdots a_{n-1}, a_n) \quad (2.10)$$

Per ogni transizione si definisce una *metrica di ramo*, coerentemente con la quantità da minimizzare (2.8), calcolabile in base al campione osservato nell'intervallo in cui la transizione avviene

$$\lambda(\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1}) \triangleq |z_n - z'_n(a_{n-L} \cdots a_n)|^2 \quad (2.11)$$

Si definisce poi una *metrica di percorso* relativa ad una data sequenza trasmessa; tale metrica identifica, all'istante finale  $N$ , la quantità da minimizzare al variare delle possibili sequenze a

$$\Lambda_{n+1}(\mathbf{a}) \triangleq \sum_{k=0}^n |z_k - z'_k(\mathbf{a})|^2 = \Lambda_n(\mathbf{a}) + \lambda(\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1}) \quad (2.12)$$

La ricerca della sequenza a massima verosimiglianza si identifica così con la ricerca del percorso a metrica minima su di un *trellis* ad  $M^L$  stati, dove  $M$  è la cardinalità dell'alfabeto di sorgente.

Si noti che il ragionamento che ci ha portato ad adottare l'algoritmo di Viterbi nel caso di un ricevitore MLSE per canale non lineare è stato del tutto analogo al ragionamento che si sarebbe potuto fare per un canale lineare. Vogliamo quindi ribadire, ancora una volta, i punti nodali che ci hanno

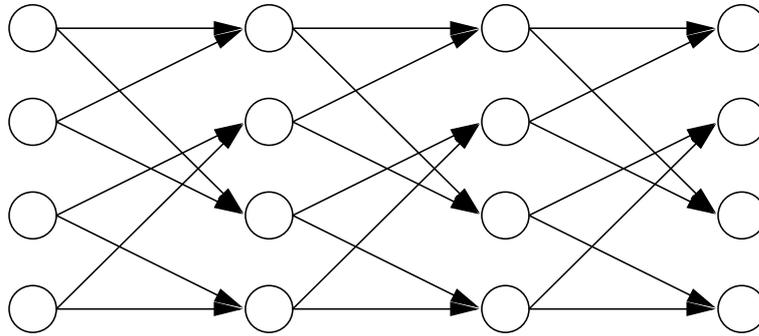


Figura 2.3: Un esempio di trellis

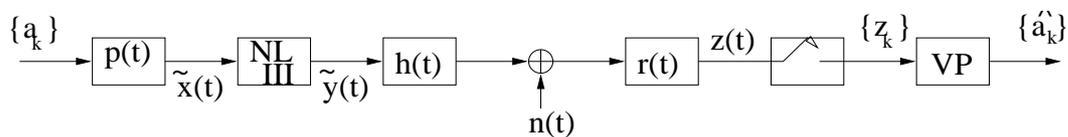


Figura 2.4: Sistema con ricevitore MLSE con campionamento a intervallo di simbolo

consentito di fare questa diretta estensione. In primo luogo, l'aver assunto campioni di rumore gaussiano incorrelati, al ricevitore; poi, l'aver determinato, per il campione osservabile in assenza di rumore, l'espressione (2.2), in ultimo l'aver dimostrato che la lunghezza di dispersione del canale rimane invariata. L'implicazione (fondamentale) di quest'ultima proprietà è che: **la complessità del trellis su cui si effettua la MLSE su canale non lineare è la stessa di quella del trellis adottato per il corrispondente canale lineare.** La figura 2.3 dà un esempio grafico di trellis a quattro stati.

La figura 2.4 mostra un sistema non lineare in cui il ricevitore effettua la stima di sequenza tramite un processore di Viterbi. Quest'ultimo differisce da un normale VP per canale lineare solo per l'impiego della (2.2), il cui valore è noto e precalcolabile, per ogni coppia di stati del trellis, sulla base dei parametri del canale (di cui il ricevitore, in situazione stazionaria, assumiamo

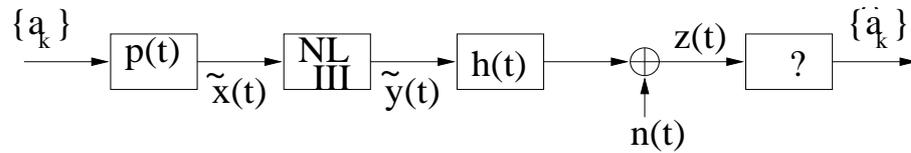


Figura 2.5: Problema del ricevitore ottimo per sistema NL

abbia conoscenza). L'unità di calcolo delle metriche di ramo del VP non ha altro da fare che da reperire dalla propria memoria il valore della (2.2) relativo alla transizione in esame e calcolare la metrica di ramo  $\lambda(\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1})$  secondo la semplice espressione (2.11).

## 2.3 Il ricevitore ottimo con sovracampionamento

Il ricevitore descritto nel paragrafo precedente rappresenta il miglior modo di stimare i simboli trasmessi (volendo minimizzare la probabilità d'errore), avendo però imposto la condizione di avere una struttura di ricevitore assegnata. In particolare, abbiamo assunto che il filtro di ricezione  $r(t)$  fosse identico a quello impiegato in un sistema lineare, in cui non compare la BPNL. Quindi, la struttura di figura 2.4 rappresenta una sorta di **ottimo vincolato**, per quanto riguarda le prestazioni ottenibili dal ricevitore.

Vogliamo ora porci l'obiettivo di progettare un ricevitore ottimo, nel senso che renda minima la probabilità d'errore, senza imporre alcun vincolo sulla sua struttura. In altre parole, ci chiediamo: **dato il sistema di figura 2.5, quale ricevitore è in grado di minimizzare la probabilità di errore sulla sequenza, elaborando il segnale osservabile tempo-continuo  $z(t)$  ?** A tale domanda sono state date, in letteratura, diverse risposte, alcune delle quali sono state esaminate nel paragrafo introduttivo. Tutte le soluzioni proposte condividono la caratteristica di impiegare, al ricevitore, un gran numero di filtri adattati.

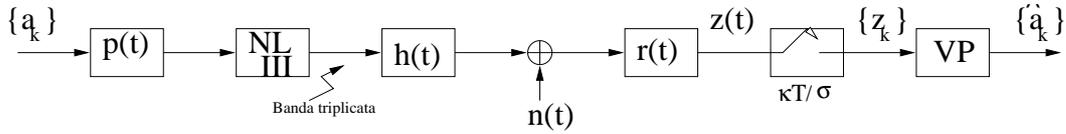


Figura 2.6: Sistema con ricevitore ottimo con sovracampionamento

La strada che intendiamo seguire è diversa: si cerca di evitare l'uso di numerosi filtri, al ricevitore, impiegando una tecnica di sovracampionamento, già adottata in [12, 13] per i sistemi lineari. Il concetto da cui si parte è semplice: come evidenziato in figura 2.6, la banda del segnale in uscita dalla BPNL è “espansa” (per un fattore tre, se la BPNL è cubica) rispetto a quella del segnale che vi entra; in generale supponiamo che sia pari a  $\sigma$  volte la *frequenza di segnalazione*. Assumendo che il filtro di ricezione sia un passa-basso ideale di banda  $\frac{\sigma}{2T}$  ed il campionatore lavori a frequenza  $\frac{\sigma}{T}$ , rispettando quindi la *condizione di Nyquist* per la ricostruibilità del segnale  $z(t)$  a partire dai propri campioni  $z_k$ , da questi ultimi saremmo in grado di estrarre l'intero contenuto informativo convogliato dall'osservabile  $z(t)$ . In realtà le sole funzioni del filtro di ricezione sono di limitare in banda il rumore, rendendo nel contempo i campioni di rumore  $w_k$  incorrelati; è evidente che si può raggiungere lo stesso scopo impiegando un filtro con risposta in frequenza  $R(f)$  tale che  $|R(f)|^2$  soddisfi il criterio di Nyquist, di banda opportuna, che gode, al contrario del passa-basso ideale, della fisica realizzabilità. Una trattazione approfondita delle condizioni a cui un filtro di front-end per ricevitore ottimo deve soddisfare si può reperire in un recente articolo [14], che fa riferimento al caso di canali lineari.

Poiché conosciamo l'espressione per l'osservabile  $z(t)$ , possiamo dare una espressione anche per i campioni  $z_k$  da esso estratti. Rifacendoci all'espressione generale del segnale tempo continuo  $z(t)$  (1.37)

$$z(t) = \gamma_1 \sum_n a_n f(t - nT) + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l a_i a_j a_l^* \rho(t - iT, t - jT, t - lT) + w(t) \quad (2.13)$$

e supponendo un perfetto sincronismo di simbolo (istante di campionamento  $t_0 = 0$ ), si estraggono i campioni agli istanti  $\frac{kT}{\sigma}$

$$\begin{aligned} z_k &\triangleq z\left(\frac{kT}{\sigma}\right) \\ &= \gamma_1 \sum_n a_n f\left((k - n\sigma)\frac{T}{\sigma}\right) \\ &+ \frac{3}{4}\gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l a_i a_j a_l^* \rho\left((k - i\sigma)\frac{T}{\sigma}, (k - j\sigma)\frac{T}{\sigma}, (k - l\sigma)\frac{T}{\sigma}\right) + w_k \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ponendo ora le seguenti definizioni

$$f_n^{(\sigma)} \triangleq f\left(n\frac{T}{\sigma}\right) \quad (2.15)$$

$$\rho_{ijl}^{(\sigma)} \triangleq \rho\left(i\frac{T}{\sigma}, j\frac{T}{\sigma}, l\frac{T}{\sigma}\right) \quad (2.16)$$

$$a_i^{(\sigma)} \triangleq \begin{cases} a_{\frac{i}{\sigma}} & i = n\sigma, n \in \mathcal{Z} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.17)$$

possiamo riscrivere la (2.14), cambiando gli indici di somma e notando che i nuovi parametri introdotti  $f_n^{(\sigma)}$  e  $\rho_{ijl}^{(\sigma)}$  (parametri di dispersione sovracampionati) si estenderanno su un intervallo di indici di durata  $\sigma$  volte maggiore rispetto ai corrispondenti parametri impiegati nella (1.38); supponiamo senza perdita di generalità che essi siano non nulli nell'intervallo  $[0; \sigma L]$ ; se la risposta del canale non è causale e i parametri risultano non nulli nell'intervallo di indici  $[-\sigma L_1; \sigma L_2]$ , si può traslare, al ricevitore, l'origine dei tempi in modo da rendere causale la risposta del canale, si porrà in tal caso  $L \triangleq L_1 + L_2$ . La (2.14) diventa

$$z_k = \gamma_1 \sum_{n=0}^{\sigma L} a_{k-n}^{(\sigma)} f_n^{(\sigma)} + \frac{3}{4}\gamma_3 \sum_{i=0}^{\sigma L} \sum_{j=0}^{\sigma L} \sum_{l=0}^{\sigma L} a_{k-i}^{(\sigma)} a_{k-j}^{(\sigma)} a_{k-l}^{(\sigma)*} \rho_{i,j,l}^{(\sigma)} + w_k \quad (2.18)$$

Le relazioni (2.15) e (2.16) definiscono i parametri di dispersione sovracampionati, calcolabili campionando le funzioni (1.35) e (1.36) con frequenza  $\frac{\sigma}{T}$ . La relazione (2.17) definisce una sequenza di ingresso interpolata, in cui i simboli  $a_i$  vengono alternati con sequenze di  $(\sigma - 1)$  zeri. Di conseguenza, l'espressione (2.18) del campione ricevuto all'istante  $k$ , include, per ogni  $k$  assegnato, diversi

addendi nulli. Considerato che, a causa del sovracampionamento, si ricevono  $\sigma$  campioni per ogni intervallo di simbolo  $T$ , possiamo dividere i campioni ricevuti in classi modulo  $\sigma$ , ed eliminare dall'espressione dei campioni di ogni classe tutti i termini nulli. A tal fine è utile esprimere l'indice dei campioni osservabili in funzione dell'intervallo di simbolo  $k$  e di un termine  $\eta$  che scandisce i  $\sigma$  campioni osservati nel  $k$ -mo intervallo. A conti fatti si ottiene:

$$\begin{aligned} z_{k\sigma+\eta}(a_{k-L} \cdots a_k) &= \gamma_1 \sum_{n=0}^L f_{n\sigma+\eta}^{(\sigma)} a_{k-n} \\ &+ \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L \rho_{i\sigma+\eta, j\sigma+\eta, l\sigma+\eta}^{(\sigma)} a_{k-i} a_{k-j} a_{k-l}^* \\ &+ w_{k\sigma+\eta} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\eta = 0, 1, \dots, (\sigma - 1) \quad (2.20)$$

Possiamo immaginare che i  $\sigma$  campioni, ricevuti in ogni intervallo di simbolo, provengano da un sistema a canali multipli, in cui ognuno dei  $\sigma$  canali (scanditi dall'indice  $\eta$ ) è caratterizzato da parametri di dispersione lineare e non lineare, rispettivamente  $f_{n\sigma+\eta}^{(\sigma)}$  e  $\rho_{i\sigma+\eta, j\sigma+\eta, l\sigma+\eta}^{(\sigma)}$ , ed è afflitto da campioni di rumore gaussiano incorrelati  $w_{k\sigma+\eta}$ . È da precisare che anche i campioni di rumore che affliggono canali diversi, sono tra loro incorrelati.

In figura 2.7 è schematizzato il sistema a canali multipli che equivale al nostro sistema con sovracampionamento. Basandosi su questo modello, ci si può porre l'obiettivo di decidere i simboli trasmessi usando la stima a massima verosimiglianza sui campioni osservati  $z_{k\sigma+\eta}$  ( $\eta = 0, 1, \dots, \sigma - 1$ ), in quanto si conosce l'espressione di tali campioni in assenza di rumore. Nell'impostare il criterio MLSE, ciò che va massimizzato è la densità di probabilità congiunta dei campioni osservabili, condizionata ai simboli trasmessi. Tale densità di probabilità è ancora una gaussiana multidimensionale ad elementi incorrelati, la sua massimizzazione coincide con la minimizzazione del modulo dell'esponente, così come si è dimostrato nel paragrafo precedente. L'espressione che va minimizzata è del tutto simile a quella trovata nel caso di ricevitore senza sovracampiona-

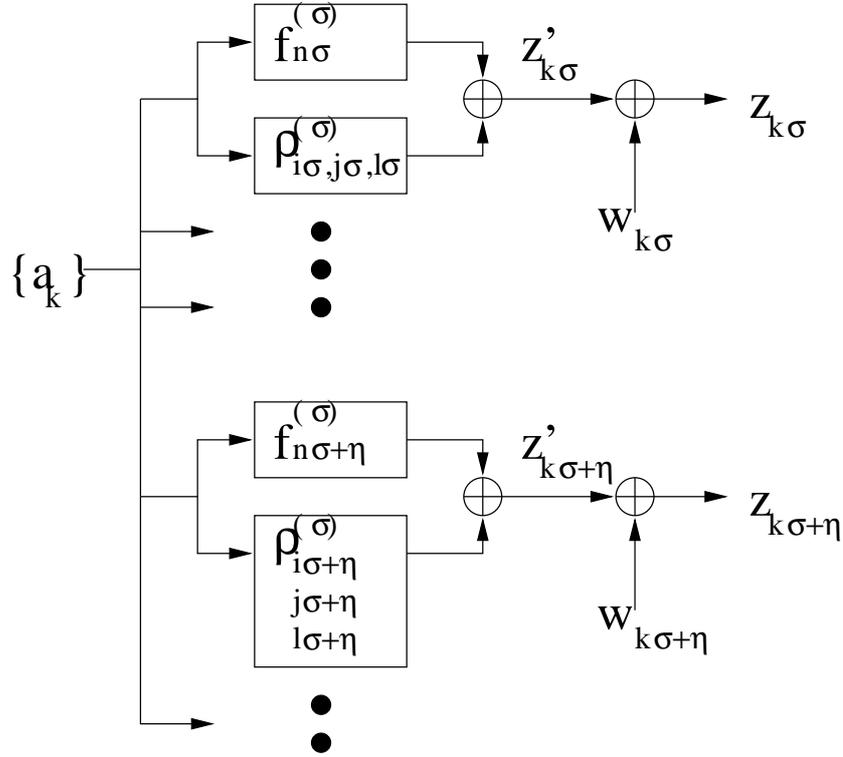


Figura 2.7: Equivalenza del sistema con sovracampionamento con un sistema multicanale

mento; nel caso la trasmissione si estenda nell'intervallo temporale  $[0; (N+1)T]$

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \left\{ \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z_{k\sigma+\eta} - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})|^2 \right\} \quad (2.21)$$

Coerentemente con l'espressione della quantità da minimizzare, diamo l'espressione delle metriche di ramo che etichettano i rami del trellis.

$$\lambda(\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1}) \triangleq \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z_{n\sigma+\eta} - z'_{n\sigma+\eta}(a_{n-L} \cdots a_n)|^2 \quad (2.22)$$

Come si vede dall'espressione (2.22), la struttura delle metriche di ramo è del tutto simile a quella trovata nel sistema, senza sovracampionamento, del para-

grafo precedente. Quest'ultimo corrisponde infatti ad un ricevitore con sovracampionamento che lavora, però, solo sul canale etichettato da  $\eta = 0$  (si veda la figura 2.7): si può verificare infatti che l'espressione di  $z'_{n\sigma}$ , che adopera il sistema con sovracampionamento, equivale alla espressione di  $z'_n$  impiegata dal sistema senza sovracampionamento.

Un'altra osservazione importante è che, se nel sistema senza sovracampionamento i coefficienti di dispersione del canale hanno memoria  $L$ , nel sistema con sovracampionamento essi (etichettati con un  $(\sigma)$  ad apice) hanno memoria  $\sigma L$ . Ogni canale  $\eta$ -mo è caratterizzato però solo da una frazione  $\frac{1}{\sigma}$  di tali coefficienti e risulta quindi avere memoria  $L$ . La conclusione che se ne trae è che **il numero di nodi del trellis impiegato dal sistema con sovracampionamento non cresce**. Si lavora quindi su un trellis con uguale complessità di quello impiegato dal sistema senza sovracampionamento: questo trellis si può pensare come ottenuto “collassando” (in maniera additiva) i trellis che caratterizzerebbero ognuno dei sottocanali appartenenti al sistema multicanale di figura 2.7. Sottolineiamo ancora una volta il fatto che, per canale stazionario, i parametri  $z'_{n\sigma+\eta}(a_{n-L} \cdots a_n)$ , che compaiono nella (2.22), sono numeri precalcolabili, che vanno memorizzati nel ricevitore, uno per ogni transizione presente sul trellis.

L'ultima osservazione che vale la pena di fare riguarda l'indice di sovracampionamento  $\sigma$ : in molti casi (specialmente in un sistema con moltiplicazione a divisione di frequenza) sorge la necessità di contenere lo spettro del segnale trasmesso sul canale  $h(t)$  entro una certa maschera di emissione. Se supponiamo che il filtro di trasmissione abbia una banda che eccede la frequenza di segnalazione per un fattore minore di uno, allora possiamo ragionevolmente supporre di limitare la banda del segnale di uscita dalla BPNL a due volte la frequenza di Nyquist  $\frac{1}{T}$ . In casi del genere, **un indice di sovracampionamento  $\sigma = 2$  è sufficiente**, e ci si riduce a lavorare su due campioni per ogni intervallo di simbolo. L'incremento di complessità che il ricevitore subisce, rispetto ad uno analogo per canale lineare, potrebbe quindi risultare accettabile.

## 2.4 Sviluppi ulteriori

Vi è ora indubbiamente la necessità di caratterizzare le soluzioni proposte dal punto di vista delle prestazioni teoricamente ottenibili. Si tenterà, in primo luogo, di estendere le già note tecniche di valutazione analitica dal caso lineare a quello non lineare, per tentare di ottenere quanto meno una indicazione sui limiti (bound) delle prestazioni ottenibili. L'esame analitico avrà poi come obiettivo quello di determinare quali sono i limiti intrinseci di un sistema non lineare, ovvero se l'introduzione di distorsione NL sia di per sé un evento peggiorativo, riguardo alle prestazioni, ipotizzando sempre di trattare il segnale ricevuto in maniera ottimale. La valutazione delle prestazioni potrà poi essere convalidata tramite simulazioni al calcolatore del sistema proposto.



# Capitolo 3

## Valutazione analitica delle prestazioni

### 3.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti si è derivato un modello equivalente in banda base di canali non lineari (cap. 1) e, sulla base di questo modello, si è concepito un ricevitore a stima di sequenza (cap. 2) in grado di minimizzare la probabilità di errore sulla sequenza stimata (ricevitore ottimo). Si è dimostrato, in particolare, come tale ricevitore sia realizzabile tramite tecniche di sovracampionamento del segnale ricevuto e successiva elaborazione dei campioni osservabili da parte di un processore di Viterbi (*Viterbi Processor*, VP). Nel caso di canale fisico ideale o moderatamente selettivo in frequenza, la lunghezza di dispersione del canale a tempo discreto può aumentare a causa dell'elemento non lineare ma, se si assume un canale fortemente selettivo in frequenza, si dimostra che il numero di stati del VP non dipende dalla presenza o meno dell'elemento non lineare.

Si vuole investigare, in questo capitolo, la possibilità di stimare le prestazioni di tale ricevitore per via analitica, estendendo, ove possibile, le tecniche di valutazione note per canali lineari [1, 11, 15]. In particolare si desidera fornire alcuni elementi necessari a rispondere alla fondamentale questione circa il fatto

che l'introduzione di elementi non lineari nella catena di trasmissione sia di per sé un evento peggiorativo delle prestazioni ottenibili dal sistema, posto di trattare sempre il segnale ricevuto in maniera ottimale. Tale questione assume una importanza di primo piano anche rispetto alla strategia da adottare per contrastare gli effetti di non linearità. Più esplicitamente: si era evidenziato, nel paragrafo introduttivo del capitolo 1, come le contromisure adottabili per combattere le distorsioni non lineari possano concentrarsi sul trasmettitore, cercando di linearizzare la caratteristica del dispositivo non lineare (tecniche di **predistorsione**), o, come nel nostro caso, sul ricevitore, cercando di trattare in maniera opportuna il segnale affetto dalle distorsioni non lineari considerando queste come parte dell'intero sistema. Se la risposta alla domanda che si è posta fosse positiva, ovvero l'introduzione di non linearità portasse ineluttabilmente con sé un degrado delle prestazioni, allora l'azione di linearizzazione sul trasmettitore sembrerebbe la strada più conveniente da seguire. In caso contrario si dimostrerebbe che la visione, comunemente diffusa, dei canali non lineari come intrinsecamente deteriori è dovuta unicamente all'incapacità di trattare l'uscita di tali canali nella maniera opportuna. Si noti l'analogia storica con il fenomeno dell'interferenza intersimbolica, considerata alcuni decenni orsono come fenomeno irrimediabilmente deterioro e trattata dai moderni ricevitori, nella maggior parte dei casi, in modo da ridurre considerevolmente gli effetti deleteri.

Nella prima parte della trattazione che segue, si farà riferimento ad un ricevitore ottimo per canale non lineare e le espressioni derivate saranno svincolate dalla particolare realizzazione del ricevitore. Ciò è possibile grazie alla condizione stessa di ottimalità, che vincola il ricevitore a stimare come sequenza trasmessa,  $\hat{\mathbf{a}}$ , quella che minimizza la distanza, calcolata nello spazio di segnale, tra segnale ricevuto affetto da rumore additivo gaussiano bianco (*Additive White Gaussian Noise*, AWGN), che chiameremo  $z(t)$ , e valore medio dello stesso segnale condizionato alla trasmissione della stessa sequenza, che chiameremo  $z'(\hat{\mathbf{a}}, t)$ . Se questa minimizzazione venga effettuata ad esempio tramite un

ricevitore ottimo a filtri adattati, come proposto in [1], §10.5, oppure tramite il ricevitore ottimo con sovracampionamento da noi proposto nel precedente capitolo, è ininfluente ai fini delle prestazioni.

Ciò premesso, ci occuperemo dapprima di determinare una maggiorazione, o limite superiore (*upper bound*), alla probabilità di errore sulla sequenza decisa dal ricevitore ottimo per canale non lineare, confrontandolo con quello ottenuto da un ricevitore convenzionale sullo stesso canale, nel quale si agisce sul trasmettitore in modo da linearizzare la caratteristica non lineare: in tal modo il ricevitore convenzionale risulta anche ottimo per il canale linearizzato. Dopodiché si prenderà in considerazione la possibilità di limitare l'uso della non linearità fino ad un certo livello massimo di potenza in ingresso, usando quindi solo un primo tratto della caratteristica, tramite un fattore di *back-off*, essendo questa una tecnica comunemente adottata per mitigare gli effetti distorcenti della non linearità. In ultimo considereremo l'impiego di un ricevitore convenzionale (lineare) sul canale non lineare distorcente, che risulta in questo caso subottimo, cercando di ottimizzarne le prestazioni, che saranno confrontate con quelle del ricevitore ottimo (non lineare): si vedrà come il divario tra le due prestazioni non giustifichi l'impiego di un ricevitore subottimo in situazioni di potenza di rumore non trascurabile.

## 3.2 Prestazioni di un ricevitore ottimo per canale non lineare

In un ricevitore a stima di sequenza a massima verosimiglianza (*Maximum Likelihood Sequence Estimation*, MLSE) la stima della sequenza trasmessa avviene mediante la selezione, in un diagramma trellis opportunamente definito, del percorso a massima verosimiglianza; il percorso è identificato da una sequenza di stati  $\sigma_k$ , ognuno dei quali è a sua volta definito da  $L$  simboli di informazione successivi, essendo  $L$  la memoria del canale. Procederemo ricorrendo

al classico concetto di evento errore [11, 15], con inizio ad un istante  $n$  e durata  $D$ , consistente nella selezione sul trellis di un percorso diverso da quello corretto in modo che i due percorsi differiscano soltanto per la sequenza di stati  $\{\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{n+D-1}\}$ . Posto di aver trasmesso la sequenza di informazione  $\mathbf{a}$ , ad ogni evento errore è possibile associare una particolare sequenza errore  $\mathbf{e} = \{\dots, 0, 0, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+D-L-1}, 0, 0, \dots\}$  con un numero  $D - L$  di elementi consecutivi non nulli dati dalla differenza di simboli appartenenti all'alfabeto dei simboli di informazione. La probabilità che ad un istante discreto  $n$  abbia inizio un generico evento errore  $E = \bigcup\{\mathbf{e}\}$  è esprimibile nel seguente modo

$$P\{E\} = P\{\bigcup\{\mathbf{e}\}\} = \sum_{\mathbf{e}} P\{\mathbf{e}\} = \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\}P\{\mathbf{a}\} \quad (3.1)$$

in cui  $\{\mathbf{e}\}$  rappresenta un particolare evento errore che ha inizio all'istante  $n$  identificato mediante la sequenza errore  $\mathbf{e}$  ad esso associata,  $P\{\mathbf{e}\}$  è la probabilità che si verifichi il particolare evento errore  $\{\mathbf{e}\}$ ,  $P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\}$  denota la probabilità che si verifichi tale particolare evento errore  $\{\mathbf{e}\}$  nell'ipotesi che la sequenza trasmessa sia  $\mathbf{a}$  (cioè che il ricevitore decida per la particolare sequenza errata  $\mathbf{a} + \mathbf{e}$  se la sequenza trasmessa è  $\mathbf{a}$ ),  $A(\mathbf{e})$  è l'insieme delle possibili sequenze di informazione compatibili con la particolare sequenza errore  $\mathbf{e}$  e  $P\{\mathbf{a}\}$  denota la probabilità a priori di tali sequenze di informazione. Si noti che l'insieme  $A(\mathbf{e})$  è costituito da tutte quelle sequenze di informazione che per il particolare evento errore  $\{\mathbf{e}\}$  danno luogo ad una sequenza stimata  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e} \neq \mathbf{a}$  ammissibile, cioè composta da simboli appartenenti all'alfabeto. Tale condizione deve naturalmente valere per la sola durata della sequenza errore, tuttavia l'insieme  $A(\mathbf{e})$  è costituito dalle sequenze di informazione che identificano univocamente gli stati coinvolti nell'evento errore (da  $\sigma_{n+1}$  a  $\sigma_{n+D-1}$  piú quello iniziale  $\sigma_n$ ) e sono quindi relative agli istanti discreti da  $n - L$  a  $n + D(\mathbf{e}) - 1$ , essendo  $D(\mathbf{e})$  la durata del particolare evento errore  $\mathbf{e}$ , sono costituite da simboli che assumono tutti i possibili valori. Di conseguenza le probabilità a priori delle sequenze sono facilmente esprimibili come  $P\{\mathbf{a}\} = \frac{1}{M^{D(\mathbf{e})+L}}$ , essendo  $M$  la cardinalità dell'alfabeto dei simboli di informazione.

Riferiamoci ora al ricevitore ottimo con sovracampionamento precedentemente descritto. Esso, trasmessa una sequenza finita di simboli  $\mathbf{a}$ , decide per la sequenza  $\hat{\mathbf{a}}$  che minimizza la metrica di percorso  $\Lambda(\tilde{\mathbf{a}})$ , ovvero che ha massima verosimiglianza; in formule:

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{a}}} \{\Lambda(\tilde{\mathbf{a}})\} \quad (3.2)$$

$$\Lambda(\tilde{\mathbf{a}}) \triangleq \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z_{k\sigma+\eta} - z'_{k\sigma+\eta}(\tilde{\mathbf{a}})|^2 \quad (3.3)$$

in cui  $\sigma$  è il fattore di sovracampionamento, i campioni  $z_n = z(n\frac{T}{\sigma})$ , essendo  $T$  l'intervallo di segnalazione, sono prelevati dal segnale  $z(t)$  all'uscita del filtro di ricezione, i campioni  $z'_{k\sigma+\eta}(\tilde{\mathbf{a}})$  rappresentano l'uscita ipotetica dello stesso filtro in assenza di rumore quando viene trasmessa la sequenza  $\tilde{\mathbf{a}}$  e l'intero  $N$  è sufficientemente grande in modo che tutti i campioni significativi ai fini della stima vengano considerati (in totale si considerano  $(N+1)\sigma$  campioni corrispondenti ad un intervallo di osservazione complessivo pari a  $(N+1)T$  che deve essere opportunamente più grande della durata totale della trasmissione in modo da tenere conto degli effetti di bordo).

Tornando alla (3.1) notiamo come la probabilità  $P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\}$  che si verifichi un particolare errore  $\{\mathbf{e}\}$  quando viene trasmessa la sequenza  $\mathbf{a}$  uguagli la probabilità che la sequenza  $\mathbf{a} + \mathbf{e}$  abbia metrica minima. Tale probabilità può essere maggiorata dalla probabilità d'errore a coppie  $P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\}$ , cioè la probabilità che la particolare sequenza errata  $\mathbf{a} + \mathbf{e}$  abbia metrica minore della particolare sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$ . Di conseguenza la (3.1) può a sua volta essere maggiorata secondo

$$\begin{aligned} P\{E\} &= \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\} P\{\mathbf{a}\} \\ &\leq \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} P\{\mathbf{a}\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si noti come tale maggiorazione corrisponda ad uno *union bound* in quanto, fissata la sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$ , gli eventi  $\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\}$  non sono dis-

giunti al variare di  $\mathbf{e}$ , è cioè possibile che, fissate due sequenze errore distinte  $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{e}_2$ , si verifichino contemporaneamente gli eventi  $\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}_1) \leq \Lambda(\mathbf{a})\}$  e  $\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}_2) \leq \Lambda(\mathbf{a})\}$ . Di conseguenza gli eventi  $\bigcup_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} \{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a}), \mathbf{a}\}$ , la cui probabilità è rappresentata dalla sommatoria interna nella (3.4), non sono disgiunti al variare della sequenza errore  $\mathbf{e}$ .

Nell'ipotesi di trasmissione della sequenza di informazione  $\mathbf{a}$ , la condizione da verificare al fine della valutazione della probabilità d'errore a coppie, e quindi della maggiorazione (3.4), risulta quindi

$$\Lambda(\hat{\mathbf{a}}) \leq \Lambda(\mathbf{a}) \quad (3.5)$$

che corrisponde alla

$$\sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z_{k\sigma+\eta} - z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}})|^2 \leq \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z_{k\sigma+\eta} - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})|^2 \quad (3.6)$$

Si noti che, nelle equazioni precedenti, i campioni osservabili  $z_{k\sigma+\eta}$  sono relativi alla sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$  e sono affetti da rumore. Negli sviluppi successivi evidenzieremo questo fatto esplicitando la loro dipendenza dalla sequenza trasmessa mediante la scrittura  $z_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})$ . La presenza dell'apice denota i campioni che si otterrebbero in assenza di rumore, vale cioè, per definizione, la seguente relazione

$$z_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a}) \triangleq z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a}) + w_{k\sigma+\eta} \quad (3.7)$$

dove i  $w_{k\sigma+\eta}$  sono campioni di rumore gaussiano, a media nulla ed incorrelati fra loro (si veda il § 2.3). Sostituendo la precedente relazione nella (3.6) e sviluppando il quadrato si ottiene la relazione equivalente

$$\sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})|^2 \leq 2\text{Re} \left[ \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} w_{k\sigma+\eta} \left( z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a}) \right)^* \right] \quad (3.8)$$

In analogia a quanto fatto per i segnali a tempo discreto possiamo indicare con  $z'(\tilde{\mathbf{a}}, t)$  il segnale ricevuto in corrispondenza della trasmissione della sequenza  $\tilde{\mathbf{a}}$ . Definiamo ora **distanza quadratica** tra i segnali  $z'(\hat{\mathbf{a}}, t)$  e  $z'(\mathbf{a}, t)$ ,

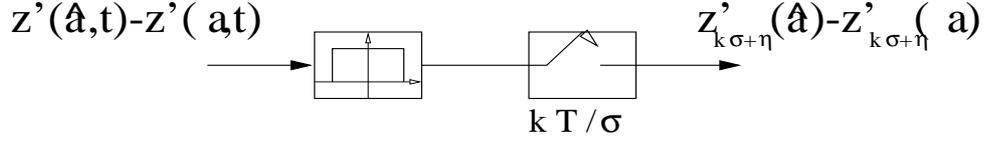


Figura 3.1: Campionamento di Nyquist del segnale differenza

che convogliano rispettivamente la sequenza “errata”  $\hat{\mathbf{a}}$  e la sequenza “corretta”  $\mathbf{a}$  in assenza di rumore, l’energia del segnale differenza  $z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - z'(\mathbf{a}, t)$ . Notiamo che, per le condizioni imposte sulla sezione *front-end* del ricevitore ottimo con sovracampionamento, la distanza quadratica tra i due segnali, come è stata definita, corrisponde al primo membro della (3.8), a meno di un fattore moltiplicativo  $\frac{\sigma}{T}$  che corrisponde alla banda (bilatera) del filtro di front-end, uguale a sua volta alla frequenza di campionamento.

La figura 3.1 illustra come i campioni del segnale differenza  $z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - z'(\mathbf{a}, t)$  siano ottenuti dal rispettivo segnale a tempo continuo tramite un campionamento che rispetta la condizione di Nyquist (il filtro front-end del ricevitore si suppone passa basso ideale di banda  $\frac{\sigma}{T}$  e guadagno unitario). In queste ipotesi l’energia del segnale differenza è calcolabile tanto sul segnale a tempo continuo quanto su quello a tempo discreto; possiamo quindi porre per la distanza quadratica  $d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  le seguenti definizioni equivalenti:

$$\begin{aligned}
 d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) &\triangleq \mathcal{E}_{z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - z'(\mathbf{a}, t)} = \int |z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - z'(\mathbf{a}, t)|^2 dt \\
 &= \frac{T}{\sigma} \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})|^2 \\
 &= \frac{T}{\sigma} \sum_{k=n}^{n+D(\mathbf{e})-1} \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})|^2 \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

dove  $\mathcal{E}_{x(t)}$  indica l’energia del segnale  $x(t)$  e gli integrali devono intendersi sull’intero asse reale (cioè da  $-\infty$  a  $+\infty$ ), se non altrimenti specificato. L’ultima espressione della distanza quadratica tiene conto del fatto che  $z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})$  dipende esclusivamente dai simboli  $(a_{k-L}, a_{k-L+1}, \dots, a_k)$  (si veda il § 2.3) e si sta con-

siderando una coppia di sequenze che differiscono della sequenza errore  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$  cui corrisponde un evento errore di durata  $D(\mathbf{e})$ ; di conseguenza per  $k < n$  o  $k > n + D(\mathbf{e}) - 1$  i termini della somma sono nulli.

Si può inoltre dimostrare che il secondo membro della (3.8) è una variabile aleatoria gaussiana a media nulla con varianza pari a  $2N_0 \left(\frac{\sigma}{T}\right)^2 d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$ . Difatti, se si pone a  $\frac{N_0}{2}$  il valore della densità spettrale di potenza della parte reale (o immaginaria) del rumore AWGN  $n(t)$  all'ingresso del ricevitore, la varianza dei campioni di rumore incorrelati  $w_k$ , ottenuti filtrando e campionando tale rumore, è pari ad  $\frac{N_0}{2}$  per la banda del filtro passa-basso  $\frac{\sigma}{T}$ , ovvero, indicando con  $E\{\cdot\}$  l'operatore aspettazione e con  $\delta_{n,n+k}$  il simbolo di Kroneker:

$$E\{\text{Re}[w_n]\text{Re}[w_{n+k}]\} = E\{\text{Im}[w_n]\text{Im}[w_{n+k}]\} = \frac{N_0}{2} \frac{\sigma}{T} \delta_{n,n+k} \quad (3.10)$$

Indicando con  $\nu$  il secondo membro della (3.8), si ha che  $\nu$  è gaussiana ed  $E\{\nu\} = 0$ , ovvero è a valor medio nullo, essendo ottenuta tramite filtraggio numerico del processo discreto gaussiano a media nulla  $w_k$ . Per quanto riguarda la varianza di  $\nu$  si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_\nu^2 = E\{\nu^2\} = \\ 4E \left\{ \left( \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} \text{Re}[w_{k\sigma+\eta}] \text{Re}[z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})] \right. \right. \\ \left. \left. + \text{Im}[w_{k\sigma+\eta}] \text{Im}[z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})] \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ed essendo le parti reale ed immaginaria di  $w_k$  indipendenti e a media nulla

$$\begin{aligned} \sigma_\nu^2 = 4E \left\{ \left( \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} \text{Re}[w_{k\sigma+\eta}] \text{Re}[z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})] \right)^2 \right\} \\ + 4E \left\{ \left( \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} \text{Im}[w_{k\sigma+\eta}] \text{Im}[z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})] \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Il primo addendo della precedente relazione vale

$$4E \left\{ \left( \sum_{k'=0}^N \sum_{\eta'=0}^{(\sigma-1)} \text{Re}[w_{k'\sigma+\eta'}] \text{Re}[z'_{k'\sigma+\eta'}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k'\sigma+\eta'}(\mathbf{a})] \right)^2 \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{k''=0}^N \sum_{\eta''=0}^{(\sigma-1)} \operatorname{Re}[w_{k''\sigma+\eta''}] \operatorname{Re}[z'_{k''\sigma+\eta''}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k''\sigma+\eta''}(\mathbf{a})] \right) \Bigg\} \\
 = & 4 \sum_{k'=0}^N \sum_{\eta'=0}^{(\sigma-1)} \sum_{k''=0}^N \sum_{\eta''=0}^{(\sigma-1)} E \{ \operatorname{Re}[w_{k'\sigma+\eta'}] \operatorname{Re}[w_{k''\sigma+\eta''}] \cdot \\
 & \operatorname{Re}[z'_{k'\sigma+\eta'}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k'\sigma+\eta'}(\mathbf{a})] \operatorname{Re}[z'_{k''\sigma+\eta''}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k''\sigma+\eta''}(\mathbf{a})] \} \\
 = & 4 \frac{N_0}{2} \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} \left( \operatorname{Re}[z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})] \right)^2 \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

avendo sostituito il valore dell'autocorrelazione della parte reale dei  $w_k$ , dato dalla (3.10). Il secondo addendo della (3.12) si può ridurre ad una espressione analoga alla precedente, dove compare il quadrato della parte immaginaria, anziché di quella reale, del segnale differenza. Complessivamente, per la varianza di  $\nu$ , si ha

$$\begin{aligned}
 \sigma_\nu^2 &= 4 \frac{N_0}{2} \frac{\sigma}{T} \sum_{k=0}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} \operatorname{Re}^2[z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})] + \operatorname{Im}^2[z'_{k\sigma+\eta}(\hat{\mathbf{a}}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a})] \\
 &= 2N_0 \left( \frac{\sigma}{T} \right)^2 d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Poiché la probabilità che una variabile aleatoria gaussiana  $\nu$  a media nulla e a varianza  $\sigma_\nu^2$  sia maggiore del valore  $d$  è

$$P\{\nu \geq d\} = Q\left(\frac{d}{\sigma_\nu}\right) \quad (3.15)$$

in cui l'integrale di un funzione gaussiana è indicato mediante la funzione

$$Q(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (3.16)$$

la probabilità d'errore a coppie prima definita risulta esprimibile come

$$P\{\Lambda(\hat{\mathbf{a}}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} = Q\left[ \frac{\frac{\sigma}{T} d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0 \left(\frac{\sigma}{T}\right)^2 d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}} \right] = Q\left[ \frac{d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0}} \right] \quad (3.17)$$

È interessante notare come l'espressione appena ricavata dipenda dalla funzione distanza, la quale è essenzialmente una energia calcolata sui segnali a tempo

continuo e non dipende in alcun modo dalla struttura del ricevitore ottimo. Sarebbe stato infatti possibile ricavare tale probabilità nel caso di ricevitore ottimo a filtri adattati proposto in [1] ottenendo esattamente la stessa espressione. Ciò dimostra l'equivalenza, d'altro canto scontata, dei diversi ricevitori ottimi ai fini delle prestazioni.

Svolgiamo ora alcune considerazioni sui risultati fin qui ottenuti. Innanzitutto notiamo che essi prescindono dal particolare modello di canale, e sono dunque validi per canali lineari e non lineari. In particolare è interessante osservare come la probabilità d'errore a coppie, che come sappiamo è uno degli ingredienti che consentono di valutare il bound di unione (3.4) che maggiora la probabilità d'evento errore, sia esprimibile mediante la funzione  $Q(\cdot)$  anche per canali di trasmissione non lineari. Le difficoltà inerenti al caso di canali non lineari sono, come vedremo, dovute al fatto che la distanza relativa alle due sequenze  $\mathbf{a}$  e  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  è funzione sia della sequenza errore sia di quella trasmessa, mentre nel caso di un canale lineare tale distanza è la stessa per tutte le coppie di sequenze che differiscono della stessa sequenza errore ed è quindi solo funzione di  $\mathbf{e}$  [11, 15].

La citata proprietà di uniformità della probabilità d'errore a coppie nel caso di canale lineare consente di semplificare l'espressione della maggiorazione (3.4) nel seguente modo [11, 15]

$$\begin{aligned}
 P\{E\} &= \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\}P\{\mathbf{a}\} \leq \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\}P\{\mathbf{a}\} \\
 &= \sum_{\mathbf{e}} P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\mathbf{a}\} \\
 &= \sum_{\mathbf{e}} P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\}P\{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})\}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

in cui l'evento  $\{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})\}$  rappresenta il fatto che, fissata la sequenza errore  $\mathbf{e}$ , si devono prendere in considerazione solo quelle sequenze  $\mathbf{a}$  con essa compatibili. La probabilità di tale evento è esprimibile facilmente nel seguente modo

$$P\{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})\} = \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\mathbf{a}\} = \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} \frac{1}{M^{D(\mathbf{e})+L}} = \frac{\text{card}\{A(\mathbf{e})\}}{M^{D(\mathbf{e})+L}} \tag{3.19}$$

in cui  $\text{card}\{\mathcal{X}\}$  denota la cardinalità di un insieme  $\mathcal{X}$ . Tale espressione si riduce a quella nota per modulazioni lineari monodimensionali (pulse amplitude modulation, PAM) con alfabeto simmetrico  $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm M - 1\}$  (si veda [11]) semplicemente osservando che

$$\text{card}\{A(\mathbf{e})\} = \prod_{k=n-L}^{n+D(\mathbf{e})-1} M - \frac{1}{2}|e_k| = M^{2L} \prod_{k=n}^{n+D(\mathbf{e})-L-1} M - \frac{1}{2}|e_k| \quad (3.20)$$

Come già preannunciato, nel caso di canale non lineare le probabilità d'errore a coppie dipendono sia dalla sequenza errore sia da quella trasmessa. In tale caso, non essendo possibile procedere come nella (3.18), si potrebbe migliorare ulteriormente la probabilità d'errore a coppie relativa a ciascun evento errore con la più grande di tali probabilità al variare della sequenza trasmessa secondo

$$P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} \leq \max_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} \quad (3.21)$$

Otteniamo per tale via la seguente ulteriore maggiorazione della probabilità d'evento errore

$$\begin{aligned} P\{E\} &\leq \sum_{\mathbf{e}} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} P\{\mathbf{a}\} \\ &\leq \sum_{\mathbf{e}} \max_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} \sum_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} P\{\mathbf{a}\} \\ &= \sum_{\mathbf{e}} Q \left[ \frac{\min_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} d(\mathbf{a} + \mathbf{e}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0}} \right] P\{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

avendo nell'ultimo passaggio sfruttato la monotonicità della funzione  $Q(\cdot)$ .

Definendo ora la distanza minima  $d_{min}$  fra tutte le possibili sequenze

$$d_{min} \triangleq \min_{\mathbf{a}, \mathbf{e}} d(\mathbf{a} + \mathbf{e}, \mathbf{a}) \quad (3.23)$$

ed indicando con  $E_{min}$  l'insieme delle sequenze errore a distanza minima (costituito da quelle sequenze errore  $\mathbf{e}$  per cui esistono sequenze  $\mathbf{a}$  ammissibili tali che  $\mathbf{a} + \mathbf{e}$  e  $\mathbf{a}$  hanno distanza minima) possiamo esprimere la maggiorazione (3.22)

nel seguente modo

$$\begin{aligned}
P\{E\} &\leq \sum_{\mathbf{e} \in E_{min}} Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right] P\{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})\} \\
&+ \sum_{\mathbf{e} \notin E_{min}} Q \left[ \frac{\min_{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})} d(\mathbf{a} + \mathbf{e}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0}} \right] P\{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})\} \\
&\simeq Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right] \sum_{\mathbf{e} \in E_{min}} P\{\mathbf{a} \in A(\mathbf{e})\} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

in cui l'approssimazione è giustificabile in condizioni di basso rumore grazie all'andamento rapidamente decrescente della funzione  $Q(\cdot)$ . Evidenzieremo, in un successivo capitolo, che l'applicabilità della precedente espressione è limitata, in molti casi, a condizioni di rumore molto basso: tale da procurare tassi d'errore sul simbolo inferiori a 10–12.

L'approssimazione (3.24) della maggiorazione sulla probabilità di evento errore richiede che venga determinata la distanza minima, cioè quella relativa agli eventi errore a maggiore probabilità di verificarsi, al variare di tutte le sequenze ammissibili  $\mathbf{a}$  e  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  ed è valida in condizioni di rapporto segnale-rumore sufficientemente elevato. In tale approssimazione è evidente come il fattore che governa le prestazioni sia  $Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right]$ . Nel seguito concentreremo quindi l'attenzione sulla determinazione di  $d_{min}$  ed assumeremo tale fattore come rappresentativo delle prestazioni del sistema. I limiti di questo approccio, spesso seguito nella letteratura [1, 9, 16, 17], saranno approfonditi nel capitolo 5, evidenziando come le approssimazioni fin qui assunte possano risultare inadeguate nella determinazione di un upper-bound accurato per tassi di errore di interesse pratico.

Prendiamo ora in esame il caso di non linearità cubica, già esaminata nei precedenti capitoli. I campioni osservabili del segnale in uscita dal canale non lineare, in assenza di rumore, hanno la nota espressione

$$z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a}) = \gamma_1 \sum_n f_{n\sigma+\eta}^{(\sigma)} a_{k-n} + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l \rho_{i\sigma+\eta, j\sigma+\eta, l\sigma+\eta}^{(\sigma)} a_{k-i} a_{k-j} a_{k-l}^* \tag{3.25}$$

dalla quale è possibile derivare l'espressione della distanza quadratica

$$d^2(\mathbf{a}+\mathbf{e}, \mathbf{a}) = \frac{T}{\sigma} \sum_k \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} \left| \gamma_1 \sum_n f_{n\sigma+\eta}^{(\sigma)} e_{k-n} + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l \rho_{i\sigma+\eta, j\sigma+\eta, l\sigma+\eta}^{(\sigma)} \Delta_{k-i, k-j, k-l} \right|^2 \quad (3.26)$$

avendo posto

$$\Delta_{k-i, k-j, k-l} \triangleq (a_{k-i} + e_{k-i})(a_{k-j} + e_{k-j})(a_{k-l} + e_{k-l})^* - a_{k-i} a_{k-j} a_{k-l}^* \quad (3.27)$$

È evidente dalla precedente espressione come, nel caso non lineare, la distanza quadratica tra due sequenze non dipenda soltanto dalla sequenza errore  $\mathbf{e}$  ma anche dalla sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$ . Ciò rappresenta una importante differenza, alla quale avevamo già fatto cenno, rispetto al caso di canale lineare in cui si calcola in modo analogo la probabilità di errore a coppie tramite una funzione della distanza tra le sequenze trasmessa e stimata, ma tale distanza viene a dipendere unicamente dalla sequenza errore  $\mathbf{e}$  [1, 11, 15].

Per stabilire se la presenza dell'elemento non lineare sia intrinsecamente dannosa, ci si può chiedere come si comporti la funzione distanza, definita sopra per il canale non lineare, rispetto ad una analoga funzione di distanza tra sequenze, definita per un canale lineare ed applicata al canale in esame, previa "linearizzazione" del dispositivo non lineare. La figura 3.2 mostra una caratteristica ingresso-uscita di tipo cubico e, tratteggiata, la caratteristica lineare che si otterrebbe predistorcendo perfettamente la cubica con un dispositivo avente una funzione ingresso-uscita ad essa inversa. La scelta di far coincidere le due curve nel punto di ordinata massima sembra quella piú conveniente, per il sistema linearizzato, poiché consente di ottenere in uscita il livello massimo di potenza disponibile dal dispositivo non lineare; una linearizzazione con un guadagno maggiore di quello mostrato in figura non sarebbe possibile se si suppone di impiegare, come unico elemento attivo, l'amplificatore con caratteristica cubica mostrato in figura.

La figura 3.3 mostra una delle possibili tecniche di linearizzazione di un amplificatore non ideale, indicato in figura con Amp, nota come *compensazione*

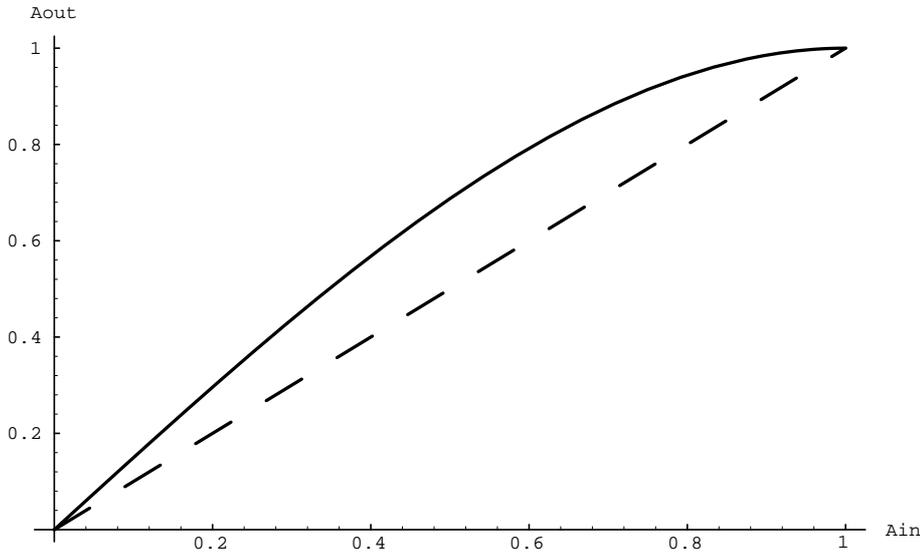


Figura 3.2: Linearizzazione a parità di potenza di picco in uscita

*Feed-Forward* [18], in cui si impiegano due dispositivi attivi identici aventi caratteristica ingresso-uscita

$$y = Ax(1 + e(x)) \quad (3.28)$$

in cui  $A$  è il guadagno dell'amplificatore nel primo tratto di caratteristica, ovvero in zona lineare, mentre il termine  $e(x)$  tiene conto delle distorsioni non lineari che subentrano nella zona di saturazione. Analizziamo il sistema tenendo conto dell'accoppiatore ACC, la cui funzione è quella di inviare sul ramo superiore una frazione  $\frac{A-1}{A}$  del segnale di ingresso e sul ramo inferiore una frazione  $\frac{1}{A}$ . Abbiamo quindi

$$v = \frac{A-1}{A}y = Ax(1 + e(x)) - x(1 + e(x)) \simeq Ax(1 + e(x)) \quad (3.29)$$

in cui si può assumere valida l'ultima approssimazione in quanto il termine  $x(1 + e(x))$  è trascurabile se il guadagno  $A$  è molto maggiore di 1. Il segnale  $w$  in ingresso al secondo amplificatore risulta

$$w = \frac{1}{A}y - x = xe(x) \quad (3.30)$$

ed è di modulo “piccolo” se il fattore di distorsione  $e(x)$  è contenuto, ovvero se la caratteristica dell’amplificatore non si discosta troppo da una retta. Con questa condizione possiamo assumere che il secondo amplificatore lavori in zona lineare e che quindi la sua uscita risulti

$$u = Aw = Axe(x) \quad (3.31)$$

Complessivamente, per il segnale in uscita dal sistema abbiamo

$$z = v - u = Ax \quad (3.32)$$

in cui il contributo di distorsione non lineare non è più presente. Si noti che la linearizzazione della caratteristica dell’amplificatore Amp non è fatta a parità di potenza di picco, bensì estrapolando il guadagno della zona lineare in tutta la dinamica di utilizzo. Il compito del secondo amplificatore Amp è quello di fornire la differenza tra il valore  $Ax$  che si vorrebbe ottenere dal primo amplificatore e il valore inferiore che invece si ottiene a causa della saturazione. Il secondo amplificatore lavora così in una dinamica ristretta e risulta quindi sottoutilizzato. Una alternativa, supponendo di avere a disposizione due amplificatori Amp identici, sarebbe quella di impiegarli in parallelo, ottenendo una caratteristica complessiva

$$y = 2Ax(1 + e(x)) \quad (3.33)$$

in cui la distorsione è ancora presente ma la potenza di picco disponibile risulta addirittura raddoppiata!

Tentiamo ora di seguire un ragionamento euristico che ci dia ulteriori informazioni sugli effetti distorcenti della non linearità. In assenza di rumore il ricevitore MLSE compensa perfettamente l’interferenza intersimbolica e raggiunge idealmente una probabilità di errore nulla; ciò accade tanto in un canale lineare che in uno non lineare in quanto, se il ricevitore ha una conoscenza esatta del canale, la metrica relativa alla sequenza corretta è identicamente nulla e, essendo per definizione non-negativa, è anche minima: ne risulta che il ricevitore seleziona sempre la sequenza corretta. Ciò, ovviamente, a patto che sussista

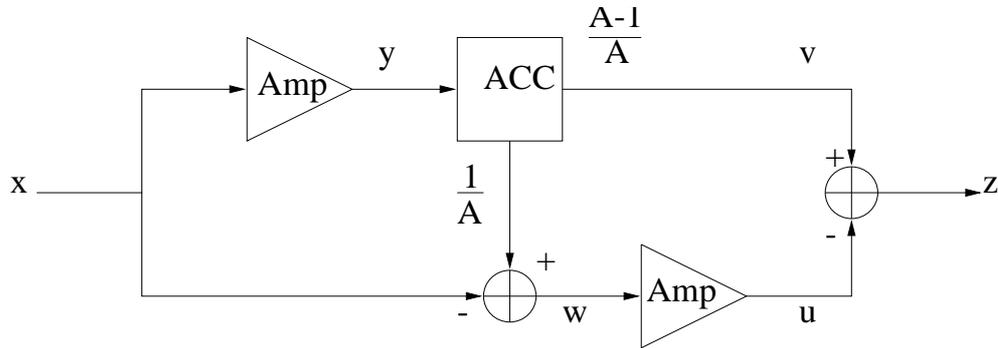


Figura 3.3: Compensazione Feed-Forward di un amplificatore non lineare

una relazione biunivoca fra sequenze e segnali ricevuti. Con questa premessa sembra quindi ragionevole limitarsi a studiare l'effetto del solo rumore in un canale non lineare e non dispersivo. In questo caso il ricevitore ottimo può limitarsi ad operare una stima simbolo per simbolo della sequenza trasmessa; se in ogni intervallo di segnalazione il ricevitore estrae un campione dal segnale trasmesso, tale campione rappresenta l'“immagine” che il ricevitore ha del simbolo trasmesso.

Confrontando le immagini della costellazione di simboli che il ricevitore osserva in uscita, rispettivamente, dal canale non lineare comprendente il dispositivo di figura 3.2 (non linearità di sola AM/AM) o la corrispondente caratteristica linearizzata, si ottengono le due costellazioni mostrate in figura 3.4, in cui  $(x)$  indica il punto che il ricevitore vede come immagine del simbolo trasmesso  $x$ . La figura 3.4 ci permette di fare alcune considerazioni: la distanza  $d(a', a)$  tra simbolo trasmesso  $a$  e simbolo stimato  $a'$ , che, come dimostrato, fornisce un indice della probabilità di decidere  $a'$  in luogo di  $a$ , è, nel caso di ricevitore simbolo per simbolo, pari alla distanza euclidea delle immagini dei due simboli al ricevitore; il vettore che va da  $(a)$  ad  $(a')$  è l'immagine ( $e$ ) dell'evento errore  $e$ , causato dal rumore e il suo modulo, proporzionale a  $|e|$  nel caso lineare, è la distanza tra i due simboli. È evidente come nel caso lineare (b), fissato l'evento errore  $e$ , la distanza tra una coppia di simboli rimanga immutata per

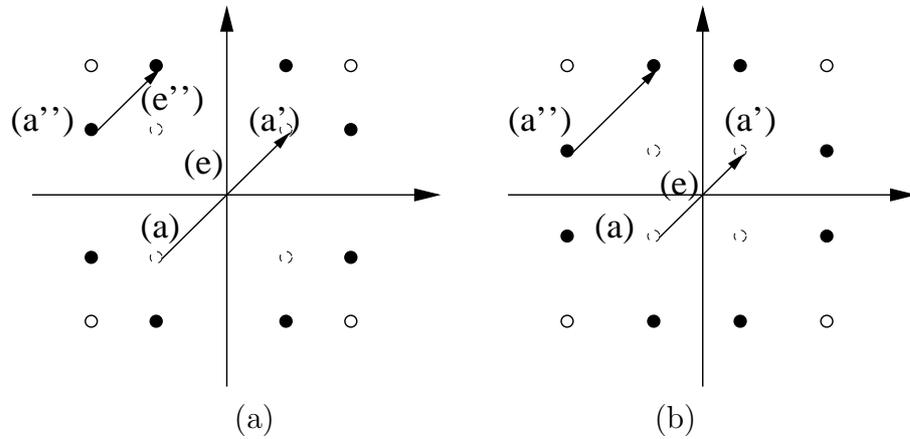


Figura 3.4: Costellazioni immagine in uscita da canale (a) non lineare (b) linearizzato

traslazione: ciò vuol dire che la probabilità di errore a coppie rimane immutata se si trasmette  $a''$  anziché  $a$ . Così non è nel canale non lineare (a) dove due simboli errore di identico modulo  $|e|$  provocano effetti diversi (( $e$ ) ed ( $e''$ )) a seconda del simbolo trasmesso. Ciò significa che nel canale non lineare alcuni errori diventano più probabili di altri e la proprietà di errore uniforme che consente di pervenire alla (3.18) non può applicarsi.

Nel caso di rumore additivo gaussiano bianco si può dimostrare come la probabilità di errore complessiva sia minimizzata quando le immagini dei simboli al ricevitore sono equispaziate: ciò porterebbe a concludere che una linearizzazione al trasmettitore è sempre auspicabile ai fini di minimizzare la probabilità di errore (sul simbolo). Inoltre sembrerebbe che, per non linearità particolarmente distorcenti in cui parte della caratteristica rimane costante e pari al valore di saturazione (figura 3.5), alcune coppie di punti diventino virtualmente indistinguibili dal ricevitore: ciò corrisponde, nella figura 3.4, a far collassare ognuno dei quattro gruppi di quattro simboli, presenti in ciascun quadrante, in un unico punto.

Le conclusioni precedenti risultano invece incomplete poiché nel ragiona-

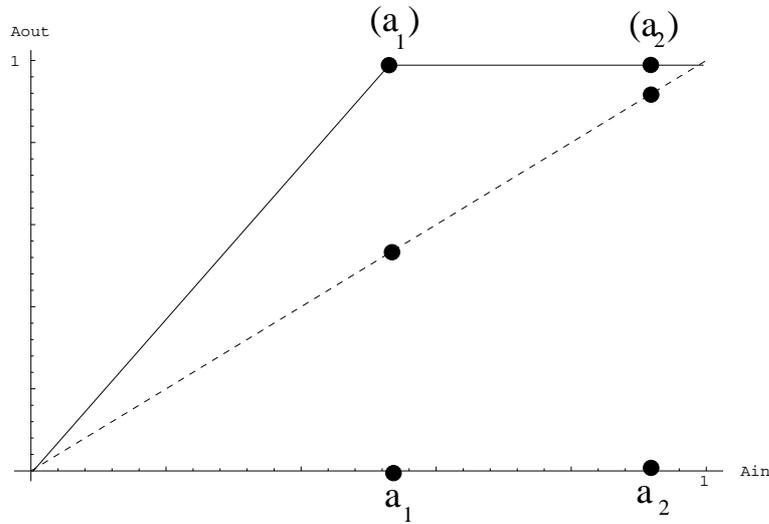


Figura 3.5: Non linearità con uscita identica per più simboli

mento si è tralasciato un fatto di importanza fondamentale: il ricevitore, per identificare un certo simbolo trasmesso, non si limita ad estrarre un singolo campione nell'intervallo di segnalazione, bensì osserva l'intero segnale a tempo continuo che convoglia il simbolo  $a$ , equivalentemente, estrae, sovracampionando, un numero di campioni sufficiente a ricostruire l'intero andamento del segnale  $z(a, t)$  che porta l'informazione relativa al simbolo  $a$ . Non è quindi lecito identificare, come nel caso di modulazione lineare, il segnale ricevuto  $z(a, t)$  con un punto  $(a)$ , immagine del simbolo trasmesso in un diagramma bidimensionale.

Per meglio evidenziare le osservazioni precedenti, riferiamoci ad un sistema PAM con impulso di trasmissione confinato nell'intervallo di segnalazione, come mostrato in figura 3.6, che impieghi la non linearità di figura 3.5. I segnali  $z(a, t)$  che convogliano i simboli  $a_1$  ed  $a_2$ , in uscita dal canale non lineare (caso a tratto pieno), sono diversi benché, estraendo un singolo campione a metà del periodo di segnalazione, questo campione risulti indistinguibile per i due simboli. Il ricevitore ottimo, grazie al sovracampionamento, è ancora in grado

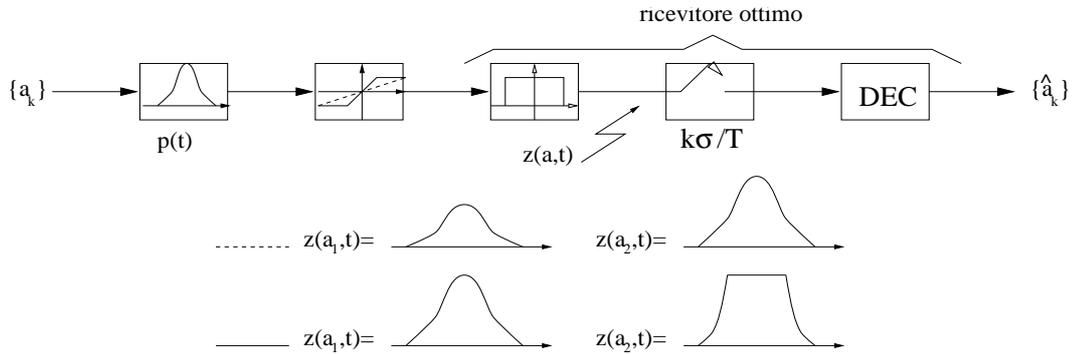


Figura 3.6: Sistema PAM non lineare senza intersimbolo

di distinguere tra i due segnali  $z(a_1, t)$  e  $z(a_2, t)$ .

Al di là della distinguibilità dei simboli, permane il problema di stabilire il rapporto tra le prestazioni del sistema che impiega il dispositivo non lineare ed il corrispondente sistema con canale linearizzato. Poiché l'espressione della probabilità che un simbolo  $\hat{a}$  abbia verosimiglianza maggiore di un simbolo  $a$  è comune nei due casi, il confronto di prestazioni può essere ricondotto ad un problema di distanza tra simboli: in altre parole ci si chiede se la distanza minima

$$d_{min} = \min_{a_1, a_2} \left\{ \int |z'(a_1, t) - z'(a_2, t)|^2 dt \right\} \quad (3.34)$$

assuma valore maggiore, corrispondente a prestazioni migliori, nel caso di canale non lineare o canale linearizzato. Questo problema sarà affrontato nei paragrafi successivi. Si noti per il momento come il valore di  $d_{min}$  dipende in generale dalla costellazione impiegata, dal tipo di non linearità ed, in particolare per il caso di canale non lineare, dalla scelta dell'impulso al trasmettitore. Difatti, nel caso degenere di impulso di trasmissione rettangolare e non linearità del tipo di figura 3.5, i segnali  $z'(a_1, t)$  e  $z'(a_2, t)$  in uscita dal canale non lineare diventano identici, portando il valore di  $d_{min}$  a zero, che corrisponde ad una probabilità pari ad un mezzo di decidere per il simbolo errato piuttosto che per quello trasmesso; è d'altronde intuitivo che, essendo i segnali osservabili

indistinguibili, il ricevitore decida a caso.

### 3.2.1 Il parametro di non linearità cubica $\xi$

Abbiamo stabilito, nel precedente paragrafo, di voler migliorare la probabilità che il ricevitore stimi una sequenza errata  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  in luogo della sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$  tramite l'espressione della probabilità di errore a coppie

$$P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\} \leq P\{\Lambda(\mathbf{a} + \mathbf{e}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} = Q \left[ \frac{d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0}} \right] \quad (3.35)$$

ed abbiamo notato come tale approssimazione valga in generale nel caso di ricevitore ottimo a stima di sequenza, su un qualunque tipo di canale affetto da rumore additivo gaussiano bianco. In particolare essa vale anche per il canale ottenuto linearizzando il dispositivo non lineare (figura 3.2). Assumeremo in questo paragrafo che il dispositivo non lineare abbia caratteristica ingresso-uscita di tipo cubico, definita da

$$y(x) = \gamma_1 x + \gamma_3 x^3 \quad (3.36)$$

dove  $x$  è un segnale in banda stretta; come già illustrato, la relazione equivalente in banda base, che coinvolge gli involucri complessi dei segnali  $x$  e  $y$ , è

$$\tilde{y}(\tilde{x}(t)) = \gamma_1 \tilde{x}(t) + \frac{3}{4} \gamma_3 \tilde{x}(t) |\tilde{x}(t)|^2 \quad (3.37)$$

Chiameremo  $\alpha_1$  il guadagno della caratteristica ottenuta linearizzando la (3.36) a parità di potenza di picco (curva tratteggiata di figura 3.2).

Sotto queste condizioni, ricordando che l'espressione del segnale a tempo continuo all'uscita del filtro di ricezione, in assenza di rumore, relativo alla trasmissione della sequenza  $\mathbf{a}$  sul canale non lineare di figura 3.7 è

$$z'(\mathbf{a}, t) = \gamma_1 \sum_n a_n f(t - nT) + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l a_i a_j a_l^* \rho(t - iT, t - jT, t - lT) \quad (3.38)$$

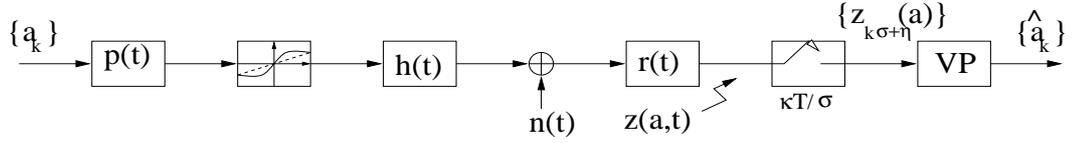


Figura 3.7: Sistema (equivalente banda-base) con canale non lineare o linearizzato

con le definizioni già poste e qui richiamate

$$h'(t) \triangleq h(t) * r(t) \quad (3.39)$$

$$f(t) \triangleq \int h'(\tau) p(t - \tau) d\tau \quad (3.40)$$

$$\rho(t_1, t_2, t_3) \triangleq \int h'(\tau) p(t_1 - \tau) p(t_2 - \tau) p^*(t_3 - \tau) d\tau \quad (3.41)$$

l'espressione della distanza quadratica tra la sequenza stimata (errata)  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  e la sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$  risulta pari a

$$d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = \int \left| \gamma_1 \sum_n e_n f(t - nT) + \frac{3}{4} \gamma_3 \sum_i \sum_j \sum_l \Delta_{i,j,l} \rho(t - iT, t - jT, t - lT) \right|^2 dt \quad (3.42)$$

con  $\Delta_{i,j,l}$  definito dalla (3.27). Si noti che la precedente espressione non è altro che la distanza quadratica espressa dalla (3.26), calcolata però sui segnali a tempo continuo. Viceversa, se si suppone di linearizzare il dispositivo cubico, l'espressione della distanza quadratica tra le due sequenze, che nel caso lineare chiameremo  $s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$ , assume la forma

$$s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = \int \left| \alpha_1 \sum_n e_n f(t - nT) \right|^2 dt \quad (3.43)$$

che, come è noto, dipende solo dalla sequenza errore  $\mathbf{e}$ .

Ci proponiamo ora di stabilire un confronto tra le espressioni di  $d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  (canale con non linearità cubica) e  $s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  (canale con caratteristica linearizzata). Per fare ciò è opportuno stabilire dapprima un legame tra i parametri  $\gamma_1$ ,  $\gamma_3$  e  $\alpha_1$ , che espliciti il modo in cui la linearizzazione è effettuata; in seguito

si definirà un **parametro di non linearità cubica**  $\xi$  che indichi “quanto” la cubica si discosta dalla caratteristica linearizzata.

Pensiamo per semplicità che il sistema di figura 3.7 sia l'equivalente in banda-base di un sistema di trasmissione monodimensionale, in cui sia i simboli trasmessi  $a_k$  sia le risposte all'impulso dei filtri sono reali; anche i coefficienti  $\gamma_1, \gamma_3$  della cubica si assumeranno reali (non linearità di sola AM/AM). Se si desidera impiegare il dispositivo fino ad un livello massimo del segnale di ingresso, che chiameremo  $A_M$ , allora si deve imporre che il segnale di ingresso alla non linearità

$$x(t) = \sum_n a_n p(t - nT) \quad (3.44)$$

non superi mai il valore  $A_M$ ; questo può essere verificato se, in caso di costellazione di simboli normalizzata tra i valori  $-1$  e  $1$ , si verificano le condizioni

$$a_n \in [-1; 1] \Rightarrow e_n \in [-2; 2] \quad (3.45)$$

$$|p(t)| \leq A_M \quad (3.46)$$

$$p(t) = 0 \quad \text{per } t \notin [0; T] \quad (3.47)$$

La condizione di far coincidere l'uscita del dispositivo cubico e di quello linearizzato quando  $x = A_M$  equivale a imporre

$$\alpha_1 A_M = \gamma_1 A_M + \gamma_3 A_M^3 \quad (3.48)$$

La caratteristica linearizzata può pensarsi ottenuta da molte cubiche diverse, tutte passanti per il punto di massimo utilizzo  $(A_M; \alpha_1 A_M)$ . Allo scopo di avere un indice quantitativo del grado di distorsione introdotto dalla non linearità, il è utile definire il parametro

$$\xi \triangleq \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{\gamma_1} \quad ; \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (3.49)$$

Poiché il parametro  $\gamma_1$  fornisce la pendenza della cubica nel suo primo tratto e poiché siamo interessati a caratteristiche di tipo saturato (in cui il guadagno decresce all'aumentare del segnale di ingresso), si ha che il parametro  $\xi$  è sempre

positivo; in particolare, per  $\xi = 0$  la cubica degenera in una retta coincidente con la caratteristica linearizzata. Il valore  $\xi = 1$  è raggiunto asintoticamente per  $\gamma_1 \rightarrow \infty$ . Dalle condizioni (3.48) e (3.49) siamo in grado di esprimere i coefficienti della cubica in funzione del parametro  $\xi$  e dei parametri  $\alpha_1$  (guadagno linearizzato) e  $A_M$  (massimo livello del segnale di ingresso):

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 \frac{1}{1-\xi} \\ \gamma_3 &= \frac{\alpha_1}{A_M^2} \frac{-\xi}{1-\xi}\end{aligned}\quad (3.50)$$

Osserviamo che nella definizione di  $\xi$  è essenziale stabilire il valore di  $A_M$ : non ha senso infatti definire “quanto la cubica è non lineare” senza specificare fino a che livello (in ascissa) la si vuole impiegare. Osserviamo inoltre che se la cubica, definita mediante il nuovo parametro  $\xi$  come

$$y(x) = \alpha_1 \frac{1}{1-\xi} x - \alpha_1 \frac{\xi}{1-\xi} \frac{x^3}{A_M^2} \quad (3.51)$$

viene impiegata in un sistema modulato in banda passante, la caratteristica presente nel sistema equivalente passa-basso di tale sistema ha espressione

$$y(x) = \alpha_1 \frac{1}{1-\xi} x - \frac{3}{4} \alpha_1 \frac{\xi}{1-\xi} \frac{x^3}{A_M^2} \quad (3.52)$$

in cui compare un fattore  $\frac{3}{4}$  dovuto alla trasformazione secondo Chebychev della funzione (3.51) [2].

Mentre le funzioni del tipo (3.51) passano tutte per il punto  $(A_M; \alpha_1 A_M)$ , al variare di  $\xi$ , e raggiungono il massimo relativo per  $x = \frac{A_M}{\sqrt{3\xi}}$ , le funzioni trasformate secondo Chebychev passano tutte per il punto  $(\frac{2}{\sqrt{3}} A_M; \alpha_1 \frac{2}{\sqrt{3}} A_M)$  e raggiungono il massimo per  $x = \frac{2}{3} \frac{A_M}{\sqrt{\xi}}$ . Tale punto di massimo viene raggiunto oltre il punto di massimo utilizzo  $A_M$  fintantoché il parametro  $\xi$  è minore di  $\frac{4}{9}$ . Poiché un dispositivo con guadagno che diventa negativo, oltre un certo punto di utilizzo, ha scarso significato ai fini della nostra analisi (linearizzazione a parità di potenza di picco), ci limiteremo ad imporre che  $\xi$  non superi il valore limite

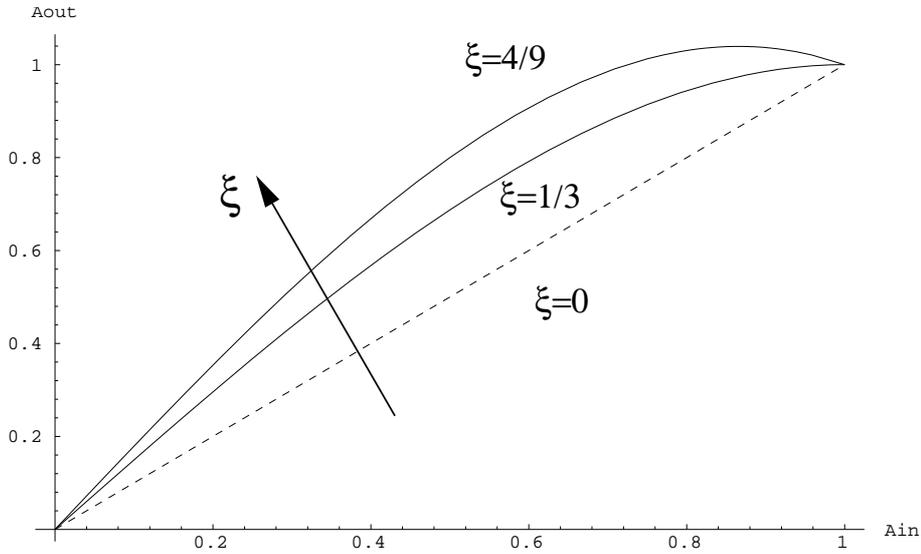


Figura 3.8: Caratteristiche cubiche al variare di  $\xi$  ( $A_M = \alpha_1 = 1$ )

$\frac{4}{9}$ , essendo questo il valore che identifica una caratteristica “completamente saturata” ovvero che ha guadagno nullo nel suo punto di massimo utilizzo ( $A_M$ ). La figura 3.8 mostra diverse caratteristiche cubiche (3.51) al variare di  $\xi$ .

### 3.2.2 Prestazioni di un sistema monodimensionale su canale a larga banda

La questione a cui siamo interessati è il confronto di prestazioni di un sistema non lineare rispetto al corrispondente sistema linearizzato. In questa ottica, e poiché un’analisi generale delle espressioni di distanza quadratica (3.42) e (3.43) risulterebbe troppo complessa, imponiamo alcune semplificazioni sul sistema di figura 3.7 al fine di garantire assenza di interferenza intersimbolica e di poter trattare con simboli e funzioni reali. Il sistema semplificato è visibile in figura 3.9 ed include un filtro di trasmissione, la cui risposta impulsiva è confinata nell’intervallo di segnalazione, mentre il filtro di canale è supposto assente (canale a larga banda). Ciò consente di esprimere il segnale osservabile

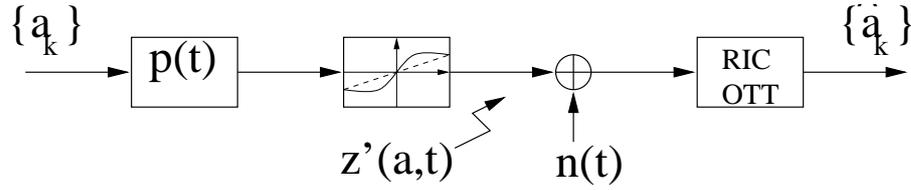


Figura 3.9: Sistema (equivalente banda-base) PAM senza intersimbolo

tempo-continuo mediante la (3.38) con le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= \delta(t) \\
 p(t) &= 0 \quad \text{per} \quad t \notin [0; T] \\
 f(t) &= p(t) \\
 \rho(t - iT, t - jT, t - lT) &= \begin{cases} f^3(t - iT) & i = j = l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Esprimendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  mediante il parametro  $\xi$  prima definito secondo le (3.50), il valor medio del segnale osservabile diviene

$$z'(\mathbf{a}, t) = \alpha_1 \frac{1}{1 - \xi} \sum_n a_n f(t - nT) - \frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{A_M^2} \frac{\xi}{1 - \xi} \sum_i a_i^3 f^3(t - iT) \quad (3.54)$$

Quando si è in assenza di intersimbolo il ricevitore ottimo stima simbolo per simbolo la sequenza trasmessa ed è facilmente dimostrabile che la sequenza errore che minimizza l'espressione della distanza quadratica tra sequenze deve avere un solo simbolo errore diverso da zero. In questo caso per la valutazione delle prestazioni è sufficiente la probabilità d'errore sul simbolo in luogo di quella d'evento errore prima definita. Le maggiorazioni di quest'ultima prima ricavate sono comunque valide anche in questo caso a patto di interpretare l'evento errore e la sequenza trasmessa come relativi ad un solo simbolo di informazione. Le grandezze vettoriali prima utilizzate per rappresentare gli eventi errore e le sequenze di simboli di informazione sono nel seguito sostituite da corrispondenti grandezze scalari. Inoltre la quantità  $\Delta_{i,j,l}$ , definita dalla

(3.27), ha ora espressione

$$\Delta_{i,i,i} = (a_i + e_i)^3 - a_i^3 = e_i^3 + 3e_i^2 a_i + 3e_i a_i^2 \quad (3.55)$$

È ora possibile scrivere l'espressione della distanza quadratica minima nei sistemi non lineare e linearizzato relativa ad un solo intervallo di simbolo

$$s_{min}^2 = \min_e s^2(a + e, a) = \min_e \left\{ \int_0^T |\alpha_1 e f(t)|^2 dt \right\} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} d_{min}^2 &= \min_{a,e} d^2(a + e, a) \\ &= \min_{a,e} \left\{ \int_0^T \left| \alpha_1 \frac{1}{1-\xi} e f(t) - \frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{A_M^2} \frac{\xi}{1-\xi} (e^3 + 3e^2 a + 3ea^2) f^3(t) \right|^2 dt \right\} \\ &= \min_{a,e} \left\{ \int_0^T |\alpha_1 e f(t)|^2 \left| \frac{1 - \xi \frac{f^2(t)}{A_M^2} \frac{3}{4} [e^2 + 3ea + 3a^2]}{1-\xi} \right|^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

È interessante notare come l'ultimo passaggio evidenzi l'integrando che compare nell'espressione di  $d^2(a + e, a)$  come prodotto di due fattori, di cui il primo è proprio l'integrando che compare nell'espressione di  $s^2(a + e, a)$ . In particolare si noti che se il secondo fattore assume valore maggiore di 1, al variare di  $t$  nell'intervallo di integrazione, allora l'integrando della (3.57) è puntualmente maggiore dell'integrando della (3.56), per qualunque  $t$ ; ciò porta al risultato  $d^2(a + e, a) > s^2(a + e, a)$  e quindi a prestazioni migliori per il sistema non lineare. Si verifica facilmente che tale risultato è possibile soltanto se

$$\frac{f^2(t)}{A_M^2} \frac{3}{4} u(a, e) < 1 \quad \forall t \quad (3.58)$$

$$u(a, e) \triangleq [e^2 + 3ea + 3a^2] \quad ; \quad \begin{aligned} a &\in [-1, 1] \\ e &\in [-1 - a, 1 - a] \end{aligned} \quad (3.59)$$

ovvero, considerato che la condizione (3.46) implica  $f^2(t) < A_M^2 \quad \forall t$ , se la funzione  $u(a, e)$  non supera il valore  $\frac{4}{3}$  per tutti i possibili valori di  $a$  ed  $e$ .

La figura 3.10 mostra l'andamento della funzione  $u(a, e)$  e la sua proiezione sul piano  $(a, e)$ , dove  $a$  è ora una variabile continua, al variare di  $a$  nell'intervallo

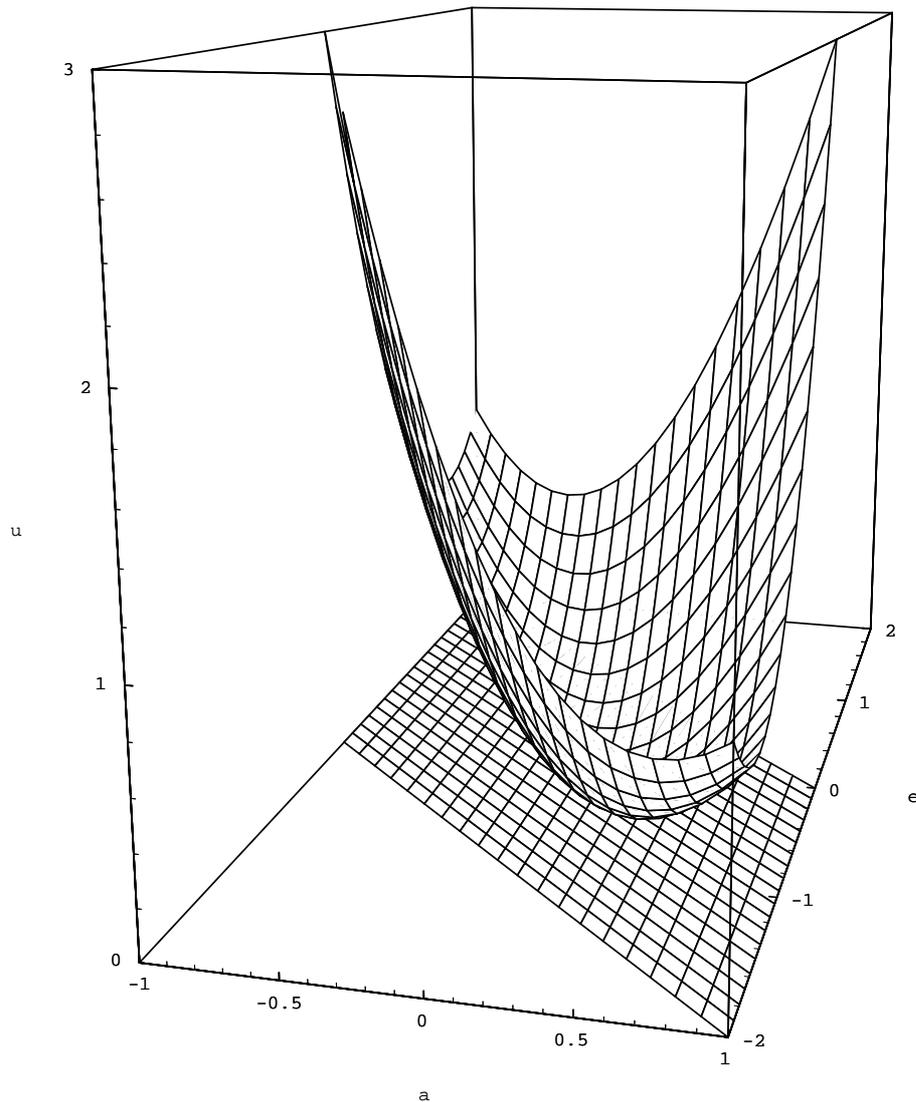


Figura 3.10: La funzione  $u(a, e)$  nel suo intervallo di definizione

$[-1, 1]$ . La forma è quella di un paraboloido ellittico intersecato con la striscia di spazio  $-1 - a \leq e \leq 1 - a$ ; la condizione  $e \in [-1 - a, 1 - a]$  serve ad assicurare che il simbolo  $\hat{a} = a + e$  sia un simbolo ammissibile della costellazione; essa è il risolto analitico della condizione citata nel § 3.2. Il paraboloido  $u$  è una forma quadratica semidefinita positiva ed ha un solo minimo, raggiunto nell'origine

degli assi, mentre, non avendo un massimo assoluto, il massimo relativo della curva  $u(a, e)$  è raggiunto nei due punti di frontiera  $(-1; 0)$  e  $(1, 0)$ . È ovvio che un simbolo errore  $e = 0$  non è ammissibile in quanto implica una decisione corretta ( $\hat{a} = a$ ); in generale, se la costellazione di simboli  $\{a\}$  è una PAM ad  $M$  livelli ( $M$ -PAM) con simboli nell'intervallo  $[-1, 1]$ , il simbolo errore a modulo minimo ha modulo  $\frac{2}{M-1}$ . È in corrispondenza di tale simbolo errore, che preso con segno negativo chiameremo  $e_{|min|}$ , unitamente alla scelta di  $a = 1$ , che chiameremo  $a_{|max|}$ , che si raggiunge il massimo possibile  $u_{max}$  della funzione  $u$ ; quindi la coppia<sup>1</sup>

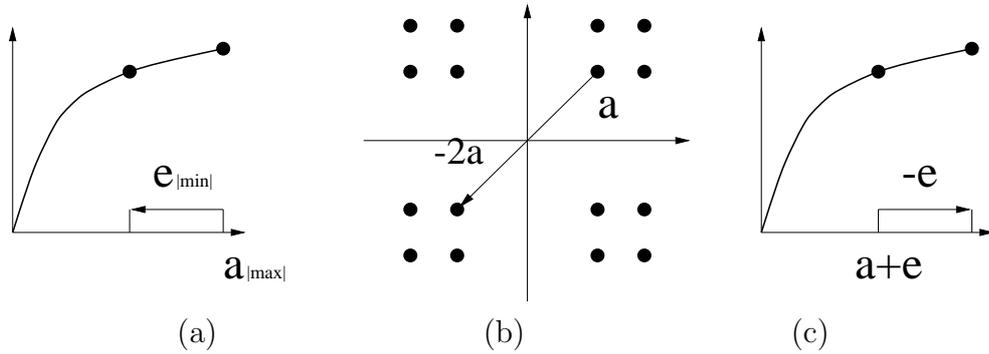
$$\begin{aligned} a &= a_{|max|} \triangleq 1 \\ e &= e_{|min|} \triangleq -\frac{2}{M-1} \end{aligned}$$

è quella che definisce la  $d_{min} = d(a_{|max|} + e_{|min|}, a_{|max|})$ , mentre la sola scelta di  $e_{|min|}$  definisce il valore di  $s_{min} = s(a + e_{|min|}, a)$ , che non dipende da  $a$  (proprietà di uniformità dell'errore). Tornando al discorso precedente, circa la possibilità di soddisfare la condizione (3.58), si nota, dalla relazione (3.59), come la condizione  $u_{max} < \frac{4}{3}$  implichi, in corrispondenza ad  $a = a_{|max|}$ , un valore di  $e_{|min|} < -0,74$ , non raggiungibile neanche per una costellazione 4-PAM, in cui  $e_{|min|} = -\frac{2}{3}$ . Il confronto tra  $d^2(a + e, a)$  e  $s^2(a + e, a)$  viene a dipendere allora fondamentalmente dalla scelta dell'impulso  $f(t)$ : in particolare, una funzione  $f(t)$  che si mantenga per gran parte della sua durata al di sotto del valore di picco  $A_M$  risulta vantaggiosa per il sistema non lineare; all'opposto un impulso  $f(t)$  rettangolare con ampiezza pari ad  $A_M$  è la scelta più penalizzante per il calcolo di  $d^2(a + e, a)$ . Dimostreremo questo risultato speculativo tra breve, tramite alcune valutazioni numeriche sulle diverse scelte possibili dell'impulso  $f(t)$ .

La figura 3.11 consente di interpretare alcune proprietà analitiche della funzione  $u(a, e)$ , pur tenendo ancora presente che l'identificazione dei segnali trasmessi con i punti della costellazione non è un'operazione lecita. Dalla figura

---

<sup>1</sup>La notazione  $e_{|min|}$  e  $a_{|max|}$  è motivata dal fatto che si tratta rispettivamente dell'errore "a modulo minimo" e del simbolo "a modulo massimo".

Figura 3.11: Alcune interpretazioni della funzione  $u(a, e)$ 

3.11(a) si intuisce come il massimo di  $u$  (e quindi il massimo della probabilità di errore a coppie) si raggiunga in corrispondenza della coppia  $(a_{|max|}, e_{|min|})$ , in quanto questi valori designano una coppia di punti per cui le rispettive uscite della non linearità hanno una distanza minima (valori in ordinata del grafico 3.11(a)): è questo il caso in cui la non linearità viene spinta al massimo verso la saturazione. La funzione  $u(-a, -e)$  è identica in valore ad  $u(a, e)$  e ciò è logica conseguenza della simmetria della caratteristica della non linearità rispetto all'origine. Supponendo assegnato un simbolo errore di valore  $e$ , derivando la  $u(a, e)$  rispetto a  $a$  ( $e$  costante) si ottiene un minimo per  $a = -\frac{e}{2}$ , che corrisponde ad una probabilità di errore a coppie minima per la coppia di simboli  $a = -\frac{e}{2}$  e  $a+e = -\frac{e}{2}+e = \frac{e}{2} = -a$ . Il fatto che il simbolo  $a = -\frac{e}{2}$  sia il meno "vulnerabile" all'errore  $e$  è intuibile osservando la figura 3.11 (b), che mostra come l'effetto di saturazione della non linearità distanzi ulteriormente le coppie di simboli diametralmente opposte rispetto al centro della costellazione. Infine la figura 3.11 (c) fornisce una giustificazione grafica del fatto che  $u(a, e) = u(a+e, -e)$ , ovvero la probabilità di decidere un simbolo errato  $a+e$  in luogo del simbolo trasmesso  $a$  è identica alla probabilità di commettere l'errore inverso.

Riepiloghiamo ora i parametri rilevanti ai fini del confronto fra le distanze quadratiche  $d^2(a+e, a)$  e  $s^2(a+e, a)$  relative a canale non lineare e canale

linearizzato, rispettivamente:

- l'impulso di trasmissione  $f(t)$ ; negli istanti  $t$  in cui è “piccolo”, l'integrando della  $d^2(a + e, a)$  viene esaltato rispetto al corrispettivo di  $s^2(a + e, a)$ ;
- il parametro di non linearità cubica  $\xi$ ;
- il numero di punti  $M$  della costellazione PAM; stabilisce il valore  $e_{|min|}$  dell'errore a distanza minima, che ha ruolo dominante sulla probabilità di errore media.

Proviamo ad esaminare, a titolo di esempio, un caso degenere: supponiamo di disporre di una caratteristica non lineare completamente saturata (con caratteristica a guadagno differenziale nullo nel punto di massimo utilizzo); ciò corrisponde ad assumere per il parametro  $\xi$  il valore  $\frac{4}{9}$ . Supponiamo inoltre di voler trasmettere il simbolo di valore assoluto massimo  $a_{|max|}$  e assumiamo che la costellazione di simboli PAM sia talmente densa ( $M \rightarrow \infty$ ) da consentire un errore a modulo minimo  $e_{|min|} \rightarrow 0$ : il simbolo trasmesso può essere quindi equivocato con un simbolo ad esso molto vicino. Se si sceglie come impulso di trasmissione  $f(t)$  un segnale rettangolare di ampiezza  $A_M$ , il ricevitore osserva un valore costante nell'intero intervallo di simbolo e il valore osservato in corrispondenza della trasmissione del simbolo  $a_{|max|}$  o del simbolo  $a_{|max|} + e_{|min|}$  è il medesimo: ci si trova quindi nell'impossibilità di distinguere i due simboli. Si può verificare analiticamente che, con le scelte operate,  $u(a_{|max|}, e_{|min|}) = 3$  e che ciò implica, unitamente alla scelta già operata per i parametri  $\xi$  e  $f(t)$ , un valore di  $d_{min}^2 = 0$ , che corrisponde appunto ad una probabilità di equivoco pari ad  $\frac{1}{2}$ , ovvero al fatto che il ricevitore non può decidere, se non a caso, quale dei due simboli è stato trasmesso.

Valutiamo ora numericamente la probabilità che si verifichi l'errore più frequente sul canale non lineare, ovvero  $P\{e_{|min|}|a_{|max|}\}$ , al variare dei tre parametri cruciali già evidenziati  $f(t)$ ,  $\xi$  e  $M$ , tramite l'espressione della probabilità d'errore

a coppie che la maggiore

$$\begin{aligned} P\{e_{|min|}|a_{|max|}\} &\leq P\{\Lambda(a_{|max|} + e_{|min|}) \leq \Lambda(a_{|max|})\} \\ &= Q\left[\frac{d(a_{|max|} + e_{|min|}, a_{|max|})}{\sqrt{2N_0}}\right] = Q\left[\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right] \quad (3.60) \end{aligned}$$

Nel seguito faremo riferimento a tale maggiorazione come *probabilità di equivoco*.

Per quanto riguarda l'impulso di trasmissione  $f(t)$  si prenderanno in considerazione tre funzioni, tutte limitate alla durata dell'intervallo di simbolo  $T$ . La prima, designata come “ $\alpha = 0$ ”, ha l'andamento del lobo principale della funzione  $\frac{T}{2\pi t} \sin \frac{2\pi t}{T}$  ed il suo nome viene dal fatto che la risposta impulsiva di un filtro di trasmissione con funzione di trasferimento a coseno rialzato, di banda  $\frac{1}{T}$  e roll-off  $\alpha = 0$  avrebbe il medesimo andamento, limitatamente all'intervallo di simbolo. La seconda, designata come “ $\alpha = 1$ ”, è analoga alla precedente e può pensarsi ottenuta limitando nel periodo di simbolo la durata della risposta impulsiva relativa ad un filtro di trasmissione con funzione di trasferimento a coseno rialzato, di banda  $\frac{1}{T}$  e roll-off  $\alpha = 1$ . La terza ed ultima funzione è molto simile ad un impulso rettangolare: un impulso rettangolare implicherebbe un filtro di trasmissione con funzione di trasferimento di tipo  $\frac{1}{\pi f} \sin(\pi f)$ , a banda infinita; limitando la banda di tale funzione di trasferimento al valore  $\frac{2}{T}$  si ottiene una risposta impulsiva che, limitata alla durata dell'intervallo di simbolo, fornisce l'ultimo impulso di trasmissione, denominato “rect”. La figura 3.12 visualizza, nell'ultima colonna, l'andamento dei tre impulsi considerati, mentre la seconda colonna mostra l'andamento delle funzioni (a banda limitata e durata illimitata) tramite la cui limitazione in durata otteniamo tali impulsi; la prima colonna mostra le funzioni di trasferimento a banda limitata relative alle risposte impulsive della seconda colonna.

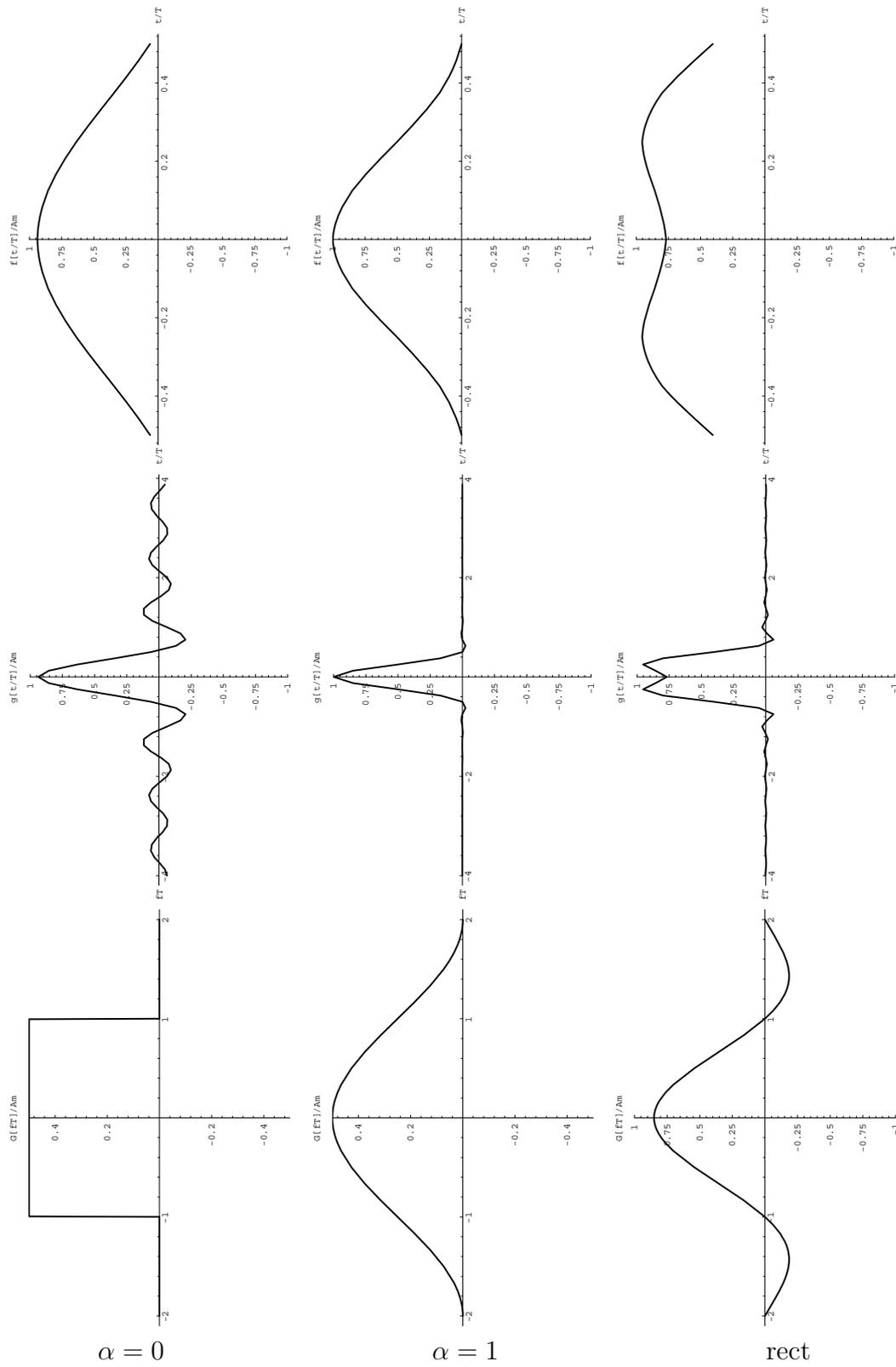


Figura 3.12: Impulsi di trasmissione  $f(t)$  presi in considerazione

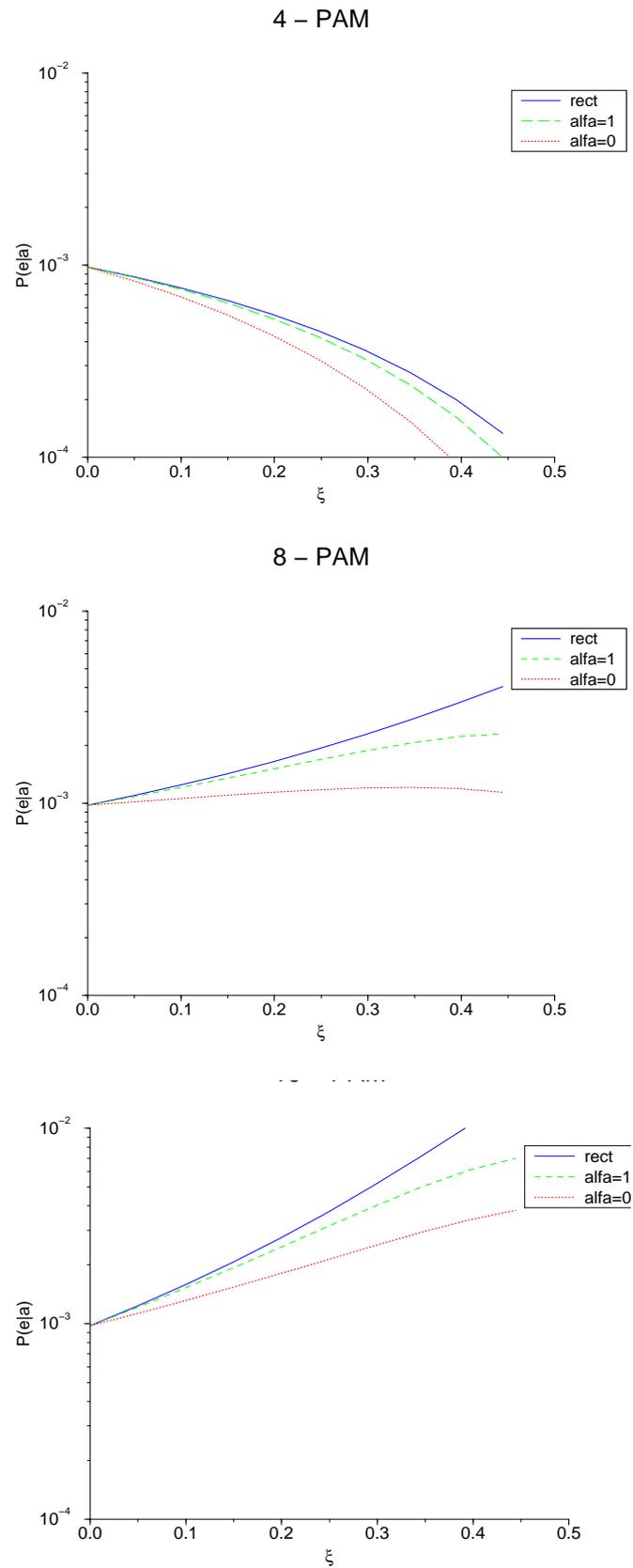


Figura 3.13: Probabilità di equivoco al variare di  $\xi$

Relativamente alla cardinalità della costellazione PAM,  $M$ , si considereranno i valori 4, 8, 16. I grafici saranno tracciati in funzione della variabile indipendente  $\xi$ , fatta variare tra 0 e  $\frac{4}{9}$ , mentre il parametro  $N_0$  sarà scelto in modo che la probabilità di compiere lo stesso tipo di errore (decidere  $a_{|max|} + e_{|min|}$  in luogo di  $a_{|max|}$ ) su canale linearizzato sia pari a  $10^{-3}$ ; con questo tipo di scelta tutte le curve partono dal valore di ordinata  $10^{-3}$ , corrispondente al valore in ascissa  $\xi = 0$  che identifica appunto un canale lineare.

La figura 3.13 mostra l'andamento delle curve di prestazione di un ricevitore ottimo identificate mediante la probabilità di equivoco, cioè la maggiorazione (3.60) della probabilità di commettere l'errore piú frequente (per semplicità nella figura si riporta in ordinata  $P\{e|a\}$ , in cui è sottinteso  $e = e_{|min|}$  e  $a = a_{|max|}$ ). Tali curve sono espresse in funzione del parametro di non linearità  $\xi$ , al variare dei parametri prima citati. Ricordiamo ancora una volta che i valori in ordinata rappresentano non la probabilità di errore media ma una approssimazione della probabilità che si commetta un errore a distanza minima. Si tratta cioè della probabilità d'errore condizionata dalla trasmissione del simbolo  $a_{|max|}$  (o  $-a_{|max|}$ ), che è il piú soggetto ad equivoci sul canale non lineare, nell'ipotesi che gli equivoci portino sempre a stimare il simbolo errato a distanza minima da quello trasmesso, ipotesi verosimile nel caso di rapporto segnale rumore sufficientemente alto.

Un'approssimazione della probabilità di errore richiederebbe che la probabilità d'equivoco venisse pesata con la probabilità a priori che venga trasmesso il simbolo  $a$  che dà luogo a errori a distanza minima. L'approssimazione potrebbe inoltre essere migliorata valutando alcuni termini relativi ad errori a distanza non minima, ad esempio mediante la seguente espressione

$$P\{E\} \simeq 2 \cdot \frac{1}{M} \left[ P\{e_{|min|}|a_{|max|}\} + \sum_{a>0, a \neq a_{|max|}} (P\{e_{|min|}|a\} + P\{-e_{|min|}|a\}) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{2}{M} \left\{ 2Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right] + 2 \sum_{\substack{a>0 \\ a \neq a_{|max|} \\ a \neq a_{|min|}}} Q \left[ \frac{d(a + e_{|min|}, a)}{\sqrt{2N_0}} \right] \right. \\
 &\left. + Q \left[ \frac{d(a_{|min|} + e_{|min|}, a_{|min|})}{\sqrt{2N_0}} \right] \right\} \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

in cui il fattore 2 tiene conto della simmetria della costellazione, il fattore  $\frac{1}{M}$  è la probabilità a priori dei simboli, supposti equiprobabili, e la sommatoria si estende sugli  $\frac{M}{2} - 1$  simboli di costellazione che si trovano a destra dell'origine, escluso il simbolo a modulo massimo. Ognuno di questi simboli  $a$  su cui si esegue la somma è supposto equivocabile solo con i due simboli più prossimi  $a \pm e_{|min|}$ , mentre il simbolo a modulo massimo, essendo all'estremo destro della costellazione, è supposto equivocabile con il solo simbolo ad esso più prossimo  $a_{|max|} + e_{|min|}$ . Questa assunzione di errori solo fra simboli adiacenti è responsabile del fatto che la (3.61) è un'approssimazione; la maggiorazione che ne consegue è quindi anch'essa approssimata.

Si noti che la (3.61) differisce dalla (3.24) nel fatto che in quest'ultima gli errori  $\pm e_{|min|}$  a distanza non minima in quanto relativi a simboli  $a \neq \pm a_{|max|}$  sono considerati come aventi distanza minima. Applicata al caso in esame la (3.24) fornisce

$$P\{E\} \lesssim Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right] \sum_{e \in E_{min}} P\{a \in A(e)\} = 2 \frac{M-1}{M} Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right] \quad (3.62)$$

in cui il simbolo  $\lesssim$  indica che tale espressione rappresenta una maggiorazione approssimata. È facile verificare che essa corrisponde ad una maggiorazione più lasca della (3.61).

Nel caso di canale linearizzato, dove vale la proprietà di errore uniformemente distribuito sui simboli, l'espressione (3.61) si semplifica in

$$P\{E\} \simeq 2 \frac{M-1}{M} P\{e_{|min|} | a_{|max|}\} \leq 2 \frac{M-1}{M} Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right] \quad (3.63)$$

che evidentemente coincide con la (3.62).

Per l'approssimazione della probabilità di errore su canale non lineare mediante la (3.61) occorrerebbe una valutazione esaustiva che richiede il calcolo della probabilità di errore a coppie condizionatamente alla trasmissione di ogni simbolo di costellazione. Notiamo comunque che, se la non linearità non è molto spinta ( $\xi \rightarrow 0$ ), si può assumere valida la proprietà di errore uniformemente distribuito, il che porta ad una espressione semplificata analoga a quella appena evidenziata per il canale linearizzato. Se viceversa la non linearità è molto distortente, è il primo addendo della (3.61), calcolabile in base alla distanza minima, a dominare il valore della probabilità di errore media

$$P\{E\} \simeq \frac{4}{M} Q \left[ \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right] \quad (3.64)$$

Assumeremo, nel prossimo capitolo, quest'ultima espressione come limite inferiore alla probabilità d'errore, in quanto, pur essendo ottenuta tramite la maggiorazione (3.61), ne trascura tutti i termini salvo il primo.

È evidente, dalle ultime due espressioni, come il confrontare i valori della probabilità di equivoco, cioè della maggiorazione della sola  $P\{e_{|min|}|a_{|max|}\}$ , anziché della probabilità d'errore sia “vantaggioso” per il sistema linearizzato piuttosto che per quello non lineare. Ciononostante la figura 3.13 mostra come tale probabilità si mantenga dello stesso ordine di grandezza nei due sistemi, per il caso di costellazione 8-PAM, al variare di  $\xi$ . Nel caso di costellazione densa, come la 16-PAM, la presenza di simboli estremi della costellazione molto prossimi tra loro fa sí che la saturazione della non linearità li renda facilmente confondibili. Il fenomeno inverso è evidenziato dal primo grafico della figura, relativo ad una costellazione 4-PAM: i simboli, piuttosto spazati fra loro, rimangono identificabili dal ricevitore anche in presenza di non linearità spinta.

L'andamento decrescente della probabilità di equivoco al crescere di  $\xi$  nel caso 4-PAM merita una spiegazione: si deve tener presente che una maggiore saturazione della non linearità implica, per il segnale in uscita dal dispositivo, valori piú vicini al valore di saturazione e, di conseguenza, un aumento di potenza me-

dia trasmessa per simbolo; tale aumento di potenza media contrasta gli effetti del rumore, la cui potenza dipende solo dal ricevitore. L'ultimo dato deducibile dalle curve in esame è la loro variazione rispetto all'impulso di trasmissione  $f(t)$ : le curve con prestazione migliore risultano sempre quelle ottenute con l'impulso denominato " $\alpha = 0$ " ("alfa=0" nella figura), mentre quelle con prestazione peggiore sono relative all'impulso denominato "rect". Tale risultato era prevedibile in base alle considerazioni qualitative svolte a proposito dell'espressione di distanza minima fra simboli.

Dai commenti precedenti dovrebbe risultare chiaro come, parlando in termini astratti, prestazioni migliori per un sistema non lineare sono raggiungibili tramite un compromesso tra aumento di potenza media associata ai simboli e distinguibilità degli impulsi, associati ai simboli, da parte del ricevitore. Nel prossimo paragrafo ci occuperemo della ricerca di tale compromesso, introducendo nel sistema un elemento di *back-off* che consenta, per una non linearità assegnata (e quindi, nel caso di cubica, per un certo  $\xi$ ), di controllarne il grado di saturazione in modo da incrementare la potenza media trasmessa pur mantenendo i simboli correttamente stimabili dal ricevitore.

Alle precedenti considerazioni si potrebbe obiettare che un confronto "equo" tra sistema non lineare e corrispondente sistema linearizzato andrebbe impostato a parità di potenza media trasmessa, piuttosto che a parità di potenza di picco. A tale critica si può rispondere osservando che un confronto a parità di potenza media implicherebbe, per il sistema linearizzato, un guadagno  $\alpha$  superiore a quello ottenuto dalla linearizzazione a parità di potenza di picco (indicato nel paragrafo precedente come  $\alpha_1$ ) e che tale guadagno non è ottenibile in alcun modo dal sistema, se si intende impiegare come unico elemento "di potenza" l'amplificatore non lineare disponibile: la semplice ragione è che un guadagno  $\alpha > \alpha_1$  applicato alla trasmissione di un simbolo estremo della costellazione porterebbe a livelli di segnale in uscita dalla non linearità maggiori del massimo livello raggiungibile dal dispositivo disponibile. D'altro canto, se si pensasse di impiegare altri elementi attivi, al fine di linearizzare il dispositivo ottenendo un

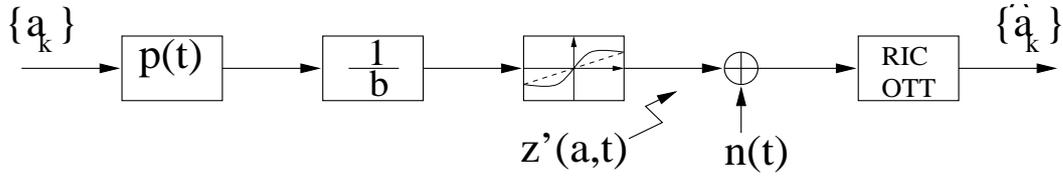


Figura 3.14: Sistema PAM con canale a larga banda e *input back-off*  $b$

guadagno  $\alpha > \alpha_1$ , si potrebbe dimostrare come una diversa configurazione di tali elementi, ad esempio ponendoli in parallelo e sommandone le uscite, genererebbe un nuovo dispositivo non lineare equivalente, con potenza di picco ben superiore a quella ottenibile dal guadagno lineare  $\alpha$ .

### 3.2.3 Uso del back-off di ingresso e sua ottimizzazione

Considereremo in questo paragrafo il modello di sistema mostrato in figura 3.14, il quale differisce dal modello di figura 3.9 unicamente per l'introduzione di un elemento lineare di guadagno  $\frac{1}{b}$ , che corrisponde ad una attenuazione della potenza di ingresso (*Input Back-Off*, IBO) all'amplificatore non lineare pari a  $B \triangleq 20 \log_{10} b$ . Il calcolo della attenuazione di potenza in uscita dalla non linearità (*Output Back-Off*, OBO) dipende dall'andamento della non linearità stessa e, ovviamente, non è direttamente proporzionale all'IBO. Per il sistema in esame si assumono le stesse ipotesi poste nel paragrafo precedente, in particolare l'impulso di trasmissione  $f(t) = p(t)$  si suppone limitato in durata al periodo di simbolo.

Si vogliono ora valutare le prestazioni del sistema descritto al variare del parametro  $B$ , in maniera analoga a quanto fatto nel paragrafo precedente. Ci si riferisce ancora una volta alla probabilità di equivoco relativa al canale non lineare, ovvero alla maggiorazione (3.60) di  $P\{e_{|min|}|a_{|max|}\}$ , basata sul valore della

distanza quadratica minima tra simboli, che nel caso presente ha espressione

$$d_{min}^2 = \min_{a,e} \left\{ \int_0^T \left| \alpha_1 \frac{1}{1-\xi} \frac{1}{b} e f(t) - \frac{3}{4} \frac{\alpha_1}{A_M^2} \frac{\xi}{1-\xi} \frac{1}{b^3} (e^3 + 3e^2a + 3ea^2) f^3(t) \right|^2 dt \right\} \quad (3.65)$$

del tutto analoga alla (3.57) e minimizzata ancora dalla coppia simbolo trasmesso-simbolo errore ( $a_{|max|}, e_{|min|}$ ).

Nei grafici di figura 3.15 la variabile indipendente in ascissa è il valore  $B$  di IBO (in dB), il simbolo  $P\{e|a\}$  presente in ordinata denota la probabilità d'errore a coppie relativa all'errore piú frequente (cioè la probabilità d'equivoco), mentre per l'impulso di trasmissione  $f(t)$  si prende in considerazione solo quello già denominato " $\alpha = 0$ ", che le curve del paragrafo precedente hanno indicato come preferibile per il sistema non lineare. Si prendono ancora in considerazione costellazioni PAM a 4, 8 e 16 punti, mentre il parametro di non linearità cubica  $\xi$  assume i tre valori  $0, \frac{1}{3}$  e  $\frac{4}{9}$ . Ancora una volta la densità spettrale di rumore  $N_0$  si fissa pari ad un valore in corrispondenza del quale il sistema linearizzato ha probabilità di equivoco pari a  $10^{-3}$ . In tale sistema la non linearità è sostituita dalla curva a guadagno costante  $\alpha_1$ , tratteggiata in figura 3.14, e l'elemento di back-off è assente in quanto valori di  $b > 1$  (IBO positivo), applicati al canale linearizzato, diminuirebbero la potenza massima aumentando così la probabilità di equivoco e valori di  $b < 1$  (IBO negativo) non sono ammissibili in quanto, applicati al canale linearizzato, richiederebbero livelli di segnale in uscita superiori al massimo disponibile dal dispositivo linearizzato. In questa ottica, le curve tracciate con un valore di  $\xi$  pari a zero, corrispondente ad un dispositivo lineare ed aventi il classico andamento a funzione  $Q(\cdot)$ , non vanno interpretate come prestazione del sistema linearizzato, la cui probabilità di equivoco è indipendente da IBO e pari a  $10^{-3}$ , ma solo come curve di riferimento. Esse sono le curve che si otterrebbero, al variare di IBO, se il dispositivo non lineare fosse sostituito da un amplificatore lineare con guadagno  $\alpha_1$  e senza limitazioni sulla potenza di picco.

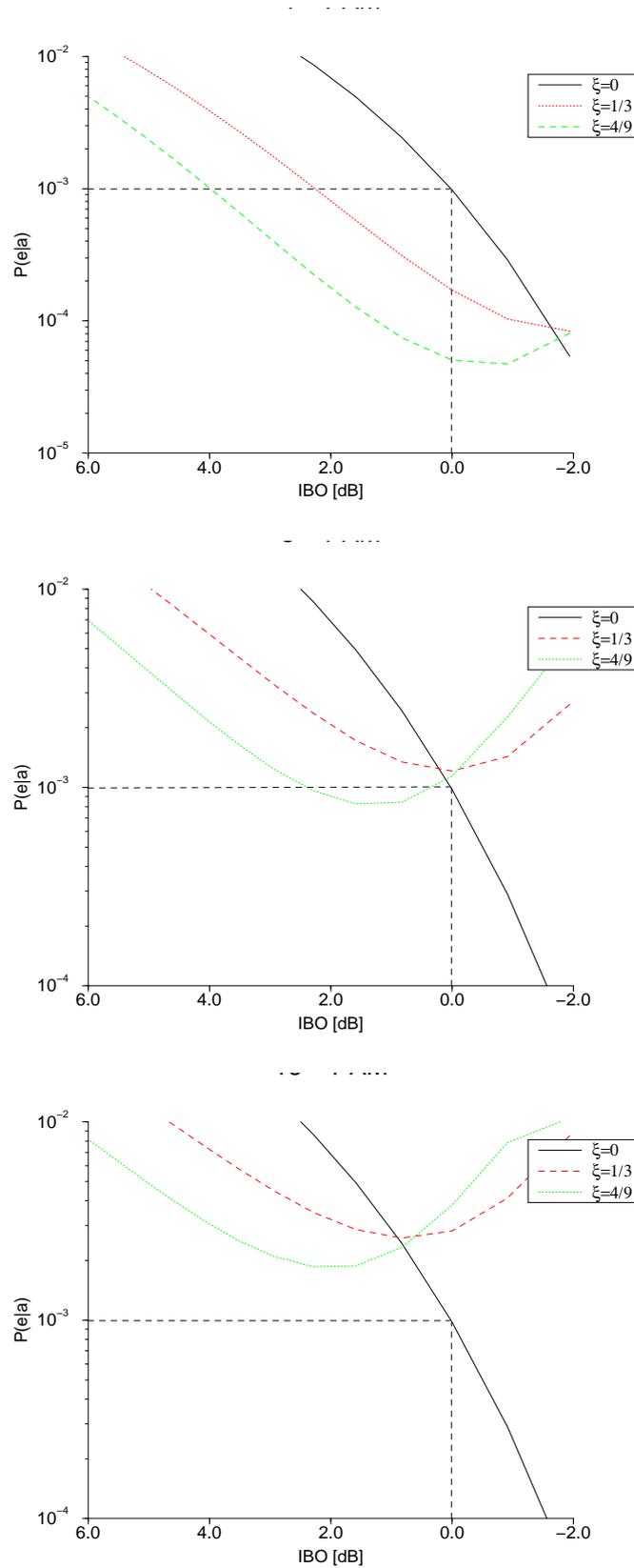


Figura 3.15: Probabilità di equivoco al variare di IBO per non linearità cubica

Il valore massimo di IBO (6 dB), presente nelle curve, corrisponde ad un fattore di attenuazione  $b = 2$  che ha l'effetto di dimezzare la dinamica del segnale di ingresso alla non linearità. È evidente come in tutte le curve con  $\xi \neq 0$  sia presente un punto di minimo, la cui ascissa fornisce il valore di back-off che realizza in maniera ottimale il compromesso tra aumento di potenza media trasmessa per simbolo e distinguibilità degli impulsi associati ai simboli e distorti dalla non linearità. Purtroppo, nel caso di non linearità cubica, non è possibile esaminare l'andamento delle curve per valori di IBO molto negativi poiché ciò corrisponde a spingere l'impiego della non linearità in una zona dove la caratteristica cubica perde di significato fisico, assumendo andamento decrescente fino ad intersecare l'asse delle ascisse (uscita nulla in corrispondenza ad un ingresso positivo).

Per superare questa limitazione occorrerebbe prendere in considerazione delle non-linearità polinomiali di ordine superiore al terzo: l'approccio analitico al calcolo della probabilità di errore sarebbe ancora fattibile ma indubbiamente complesso, anche nel caso assunto di assenza di intersimbolo. Si preferisce ora prendere in considerazione un altro genere di non linearità, meno trattabile analiticamente ma più vicina all'andamento delle caratteristiche di amplificatori reali saturati: una funzione "a limitatore" con guadagno lineare nel primo tratto e completa saturazione dal punto di massimo utilizzo in poi; tale funzione è visibile in figura 3.16. Si noti che la funzione a limitatore è assunta come caratteristica AM/AM della non linearità presente nel sistema in banda passante il cui equivalente in banda base è visibile in figura 3.17 (ovviamente la caratteristica di trasferimento della non linearità in banda passante non è a limitatore).

Se si indica con  $F[\cdot]$  la caratteristica a limitatore, la distanza quadratica minima relativa ad una coppia simbolo trasmesso – simbolo errore assume l'espressione

$$d_{min}^2 = \min_{a,e} \left\{ \int_0^T \left| F \left[ \frac{1}{b}(a+e)f(t) \right] - F \left[ \frac{1}{b}af(t) \right] \right|^2 dt \right\} \quad (3.66)$$

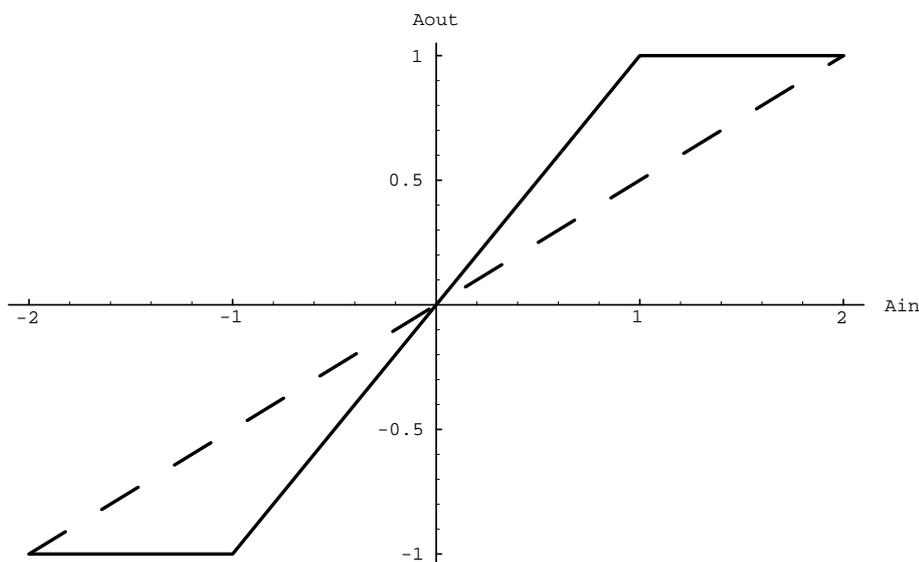


Figura 3.16: Caratteristica a limitatore e sua linearizzazione

La minimizzazione rispetto alla coppia  $(a, e)$  non è piú analiticamente fattibile come nel caso di non linearità di tipo cubico; è però intuitivo che le coppie di simboli piú facilmente equivocabili sono quelle che si trovano all'estremo della costellazione. Assumiamo quindi di aumentare la probabilità dell'errore piú frequente ancora mediante la probabilità di equivoco

$$P\{e_{|min|}|a_{|max|}\} \leq Q \left[ \frac{d(a_{|max|} + e_{|min|}, a_{|max|})}{\sqrt{2N_0}} \right] = Q \left( \frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}} \right) \quad (3.67)$$

dove il calcolo di  $d(a_{|max|} + e_{|min|}, a_{|max|})$  va ora condotto per via numerica. Il valore di  $N_0$  è di nuovo fissato in modo da ottenere una probabilità di equivoco di  $10^{-3}$  tra i simboli  $a_{|max|} + e_{|min|}$  e  $a_{|max|}$ , qualora l'elemento di back-off sia assente ( $B = 0$  dB).

La figura 3.18 mostra, in modo analogo alla figura 3.15, le curve di prestazione del sistema con non linearità a limitatore al variare del back-off di ingresso, identificate in ordinata con la probabilità di equivoco  $P\{e|a\}$ ; l'impulso di trasmissione è ancora una volta quello denominato " $\alpha = 0$ ". Si noti come per valori di

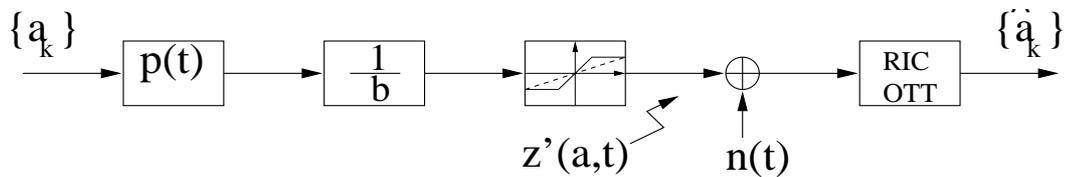


Figura 3.17: Sistema con caratteristica non lineare a limitatore

IBO maggiori di zero l'uso della non linearità è limitato al solo tratto rettilineo e di conseguenza la curva ha il tipico andamento "a funzione  $Q(\cdot)$ ". Quando IBO diventa minore di zero la non linearità entra in saturazione; diminuendo quindi ulteriormente il back-off, cioè spingendo ulteriormente la non linearità in zona di saturazione, si rende sempre meno distinguibili i segnali che convogliano i diversi simboli; le curve mostrano come sia possibile individuare un valore ottimo del back-off per ogni situazione. Esistono valori di back-off negativi per i quali l'uscita della non linearità a limitatore, in corrispondenza a coppie di simboli estremi della costellazione, è la medesima (si veda la figura 3.5): ciò accade per  $B \cong -1,4$  dB nel caso 8-PAM e  $B \cong -0,7$  dB nel caso 16-PAM. Se fosse possibile identificare i segnali osservabili dal ricevitore con le uscite della non linearità corrispondenti ai simboli trasmessi, cosa che accade se il filtro di trasmissione ha risposta all'impulso rettangolare, si avrebbero probabilità di equivoco pari ad  $\frac{1}{2}$  in corrispondenza dei valori di IBO citati prima. Come previsto nella analisi teorica già svolta, ciò non accade grazie alla risposta non costante del filtro di trasmissione e la probabilità di equivoco si mantiene dell'ordine di  $10^{-3}$ .

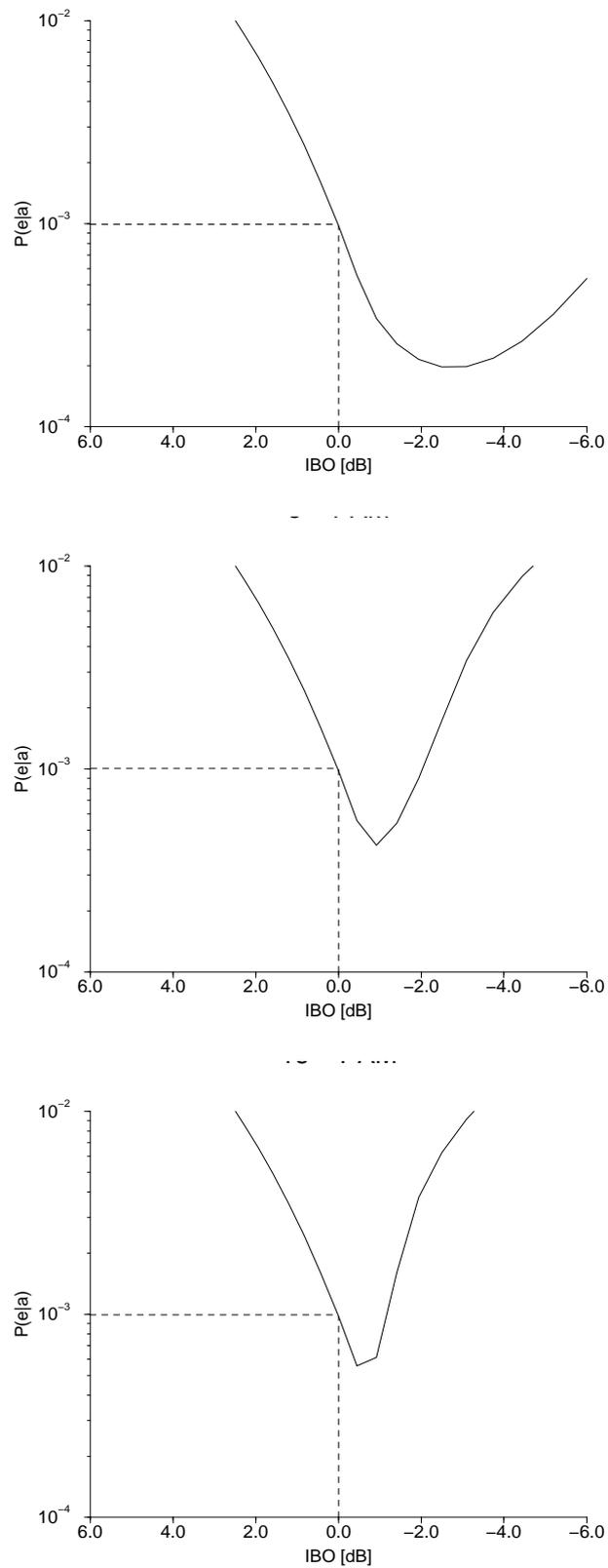


Figura 3.18: Probabilità di equivoco al variare di IBO per non linearità a limitatore

### 3.3 Prestazioni di un ricevitore convenzionale per canale non lineare

La teoria svolta nei precedenti paragrafi ha consentito di estendere alcune tecniche di valutazione analitica delle prestazioni, già note per lo studio di ricevitori ottimi per canali lineari, al caso di canali non lineari. In particolare, è stata fornita una espressione che approssima la probabilità di stimare una certa sequenza errata  $\hat{\mathbf{a}}$  in luogo della sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$  come probabilità d'errore a coppie. Si è dimostrato come tale probabilità non dipenda dalla realizzazione del ricevitore ottimo, fatto implicito nel concetto stesso di ottimalità, e si è fornita una prova della equivalenza, in termini di prestazioni, del ricevitore ottimo con sovracampionamento da noi proposto con il ricevitore ottimo denominato "a filtri adattati" analizzato in [1]. Si è evidenziata altresì l'impossibilità di applicare la proprietà di errore uniforme, essendo gli eventi errore più frequenti se applicati a particolari sequenze piuttosto che ad altre. Curve di prestazione basate sulla cosiddetta probabilità di equivoco, cioè la più grande delle probabilità d'errore a coppie, sono state ottenute nel caso, analiticamente semplice, di assenza di interferenza intersimbolica, per varie configurazioni del canale: non linearità cubica o a limitatore, presenza o meno di back-off. È stata evidenziata l'importanza della risposta del filtro di trasmissione e il *trade-off* fra densità della costellazione e grado di saturazione della non linearità.

Nel presente paragrafo si desidera valutare le prestazioni che si ottengono impiegando un ricevitore ottimo per canale lineare impiegato in un canale non lineare. Faremo riferimento a tale ricevitore come *convenzionale*. Ancora una volta, il modo di operare di un tale ricevitore ottimo per canale lineare consente di valutarne le prestazioni senza fare riferimento alla particolare realizzazione: possiamo pensare idealmente che il ricevitore disponga di un banco di filtri adattati a tutti i segnali ricevuti in assenza di rumore  $y'(\tilde{\mathbf{a}}, t)$  relativi alle possibili sequenze di informazione  $\tilde{\mathbf{a}}$  trasmesse sul canale lineare che il ricevitore "crede" essere presente. Il ricevitore convenzionale deciderà per la sequenza  $\hat{\mathbf{a}}$

che minimizza la metrica

$$\Lambda(\tilde{\mathbf{a}}) \triangleq \int |z(\mathbf{a}, t) - y'(\tilde{\mathbf{a}}, t)|^2 dt \quad (3.68)$$

dove  $z(\mathbf{a}, t)$  è il segnale effettivamente ricevuto, affetto da rumore, e  $y'(\tilde{\mathbf{a}}, t)$  è il segnale, privo di rumore, che si sarebbe ricevuto se il canale fosse stato quello lineare per il quale il ricevitore è progettato e si fosse trasmessa la sequenza  $\tilde{\mathbf{a}}$ . A rigore l'espressione (3.68) è mal posta poiché l'integrale contiene, nel termine  $z(\mathbf{a}, t)$ , un contributo di rumore bianco a potenza infinita. Essa vale solo nell'ipotesi di rumore termico a banda limitata, quindi richiede un preventivo filtraggio del segnale ricevuto. Tale filtraggio può essere effettuato mediante un filtro di front-end il cui unico compito è quello di limitare la potenza di rumore lasciando lo spettro del segnale inalterato, quindi con banda qualunque purché maggiore di quella del segnale, senza che questo abbia effetti sulle prestazioni del ricevitore, che resta in ogni caso ottimo. Alternativamente, sviluppando i quadrati nella (3.68), si può eliminare l'integrale di  $|vertz(\mathbf{a}, t)|^2$  che è indipendente da  $\tilde{\mathbf{a}}$  e definire una nuova metrica  $\Lambda(\tilde{\mathbf{a}})$ . Le metriche utilizzate operativamente sono inoltre basate su versioni filtrate e campionate del segnale ricevuto e non sono quindi affette da tale problema. Nel seguito utilizzeremo l'espressione (3.68) senza ulteriori precisazioni essendo tale aspetto di ordine prettamente concettuale.

Ipotizziamo che il ricevitore sia progettato per un canale contenente gli stessi elementi lineari (filtri) piú un amplificatore lineare di guadagno  $\alpha$  in luogo del dispositivo non lineare: questo è il significato del blocco di figura 3.19 contenente la nuvola, che rappresenta l'“idea” che il ricevitore ha del canale. Quale sia il guadagno  $\alpha$  che è piú conveniente assumere nel progetto del ricevitore convenzionale, sarà argomento del prossimo paragrafo.

È interessante ora seguire la stessa linea di ragionamento adottata nel §3.2, relativamente al caso del ricevitore ottimo, per ottenere il valore della probabilità che la metrica di percorso valutata dal ricevitore convenzionale relativamente alla sequenza stimata ed errata  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  sia minore della metrica

### 3.3. PRESTAZIONI DI UN RICEVITORE CONVENZIONALE PER CANALE NON LINEARE.

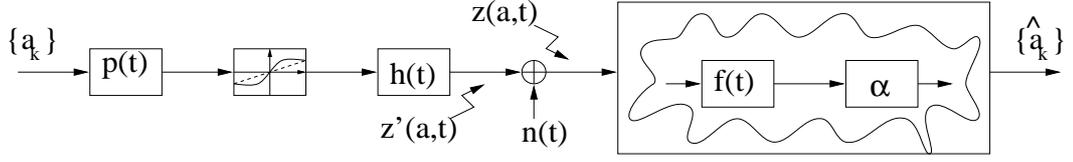


Figura 3.19: Ricevitore ottimo per canale lineare impiegato nel caso di canale non lineare

relativa alla sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$ . Come sappiamo questa probabilità d'errore a coppie approssima bene, in condizioni di rapporto segnale/rumore elevato, la probabilità  $P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\}$  che venga commesso tale errore di decisione.

La disuguaglianza per cui la sequenza errata  $\hat{\mathbf{a}}$  ha verosimiglianza maggiore della sequenza corretta  $\mathbf{a}$  è

$$\Lambda(\hat{\mathbf{a}}) \leq \Lambda(\mathbf{a}) \quad (3.69)$$

che, ricorrendo alla espressione (3.68) delle metriche impiegate dal ricevitore convenzionale, diventa

$$\int |z(\mathbf{a}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t)|^2 dt \leq \int |z(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t)|^2 dt \quad (3.70)$$

Poiché il segnale ricevuto  $z(\mathbf{a}, t)$  è dato dalla somma del rispettivo segnale privo di rumore  $z'(\mathbf{a}, t)$  e del rumore  $n(t)$ , sviluppando i calcoli ed eliminando gli addendi comuni a primo e secondo membro della disuguaglianza, si ottiene

$$\begin{aligned} & \int 2\text{Re}\{n(t) (z'(\mathbf{a}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t))^*\} dt + \int |z'(\mathbf{a}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t)|^2 dt \\ & \leq \int 2\text{Re}\{n(t) (z'(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t))^*\} dt + \int |z'(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t)|^2 dt \end{aligned} \quad (3.71)$$

che è ulteriormente semplificabile in

$$\int |z'(\mathbf{a}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t)|^2 - |z'(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t)|^2 dt \leq \int 2\text{Re}[n(t) (y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t))^*] dt \quad (3.72)$$

in cui notiamo che il rumore bianco appare ora a secondo membro opportunamente filtrato, confermando quindi la validità della (3.68) a prescindere dalla questione di ordine concettuale prima rilevata.

Si può dimostrare, analogamente a quanto fatto nel caso del ricevitore ottimo, che se  $n(t)$  è un rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza tale che

$$E\{\text{Re}[n(t)]\text{Re}[n(t + \tau)]\} = E\{\text{Im}[n(t)]\text{Im}[n(t + \tau)]\} = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \quad (3.73)$$

allora il secondo membro della (3.72) è una variabile aleatoria gaussiana  $\nu$  a media nulla e varianza

$$\sigma_\nu^2 = 2N_0s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) \quad (3.74)$$

dove si è definita la quantità

$$s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) \triangleq \int |y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t)|^2 dt \quad (3.75)$$

È facile riconoscere l'espressione di  $s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  come distanza quadratica tra la sequenza stimata  $\hat{\mathbf{a}}$  e la sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$ , calcolata sul canale lineare ipotizzato dal ricevitore.

Il primo membro della (3.72), che chiameremo  $d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$ , può essere manipolato algebricamente nel modo seguente

$$\begin{aligned} d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) &= \int |y'(\hat{\mathbf{a}}, t)|^2 - |y'(\mathbf{a}, t)|^2 + 2\text{Re}[z'(\mathbf{a}, t)^*(y'(\mathbf{a}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t))] dt \\ &= \int |y'(\hat{\mathbf{a}}, t)|^2 + |y'(\mathbf{a}, t)|^2 - 2\text{Re}[y'(\mathbf{a}, t)^*y'(\hat{\mathbf{a}}, t)] dt \\ &\quad - \int 2|y'(\mathbf{a}, t)|^2 - 2\text{Re}[y'(\mathbf{a}, t)^*y'(\hat{\mathbf{a}}, t)] \\ &\quad - 2\text{Re}[z'(\mathbf{a}, t)^*(y'(\mathbf{a}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t))] dt \end{aligned} \quad (3.76)$$

Nel primo degli ultimi due integrali si può riconoscere la definizione di  $s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  mentre il secondo integrale verrà chiamato  $q_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  e può essere semplificato nella forma

$$q_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = 2\text{Re} \left[ \int (y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t))(z'(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t))^* dt \right] \quad (3.77)$$

in modo tale che si ottiene, per il primo membro della (3.72), l'espressione

$$d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) - q_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) \quad (3.78)$$

### 3.3. PRESTAZIONI DI UN RICEVITORE CONVENZIONALE PER CANALE NON LINEARE.

A questo punto, la probabilità di errore tra sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$  e sequenza stimata  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  può essere maggiorata dalla probabilità d'errore a coppie, cioè che si verifichi la disuguaglianza (3.72); in formule

$$P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\} \leq P\{\Lambda(\hat{\mathbf{a}}) \leq \Lambda(\mathbf{a})\} = Q \left[ \frac{d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0 s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}} \right] \quad (3.79)$$

Facciamo alcuni commenti sulle espressioni appena introdotte: la quantità  $s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$ , presente al denominatore della (3.79), contribuisce alla potenza di rumore e, essendo calcolata in base a segnali  $y'(\mathbf{a}, t)$ , ottenuti dalle sequenze  $\mathbf{a}$  tramite modulazione lineare, dipende soltanto dalla sequenza errore  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$  ed ha espressione esplicita

$$s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = \int \left| \alpha \sum_n e_n f(t - nT) \right|^2 dt \quad (3.80)$$

analogamente alla (3.43) relativa al canale linearizzato prima discusso. La quantità  $d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  può essere interpretata ancora come una sorta di “distanza” tra sequenza trasmessa e stimata: essa è ottenuta dalla distanza quadratica relativa al ricevitore convenzionale  $s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  tramite la sottrazione di una quantità correttiva  $q_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  il cui valore è determinato integrando il prodotto di due fattori. Il primo fattore  $(y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t))$  è dovuto alla differenza di due segnali linearmente modulati dalle sequenze stimata e trasmessa e dipende quindi dalla sola sequenza errore, mentre il secondo fattore  $(z'(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t))$  tiene conto della differenza tra il segnale, privo di rumore, che è stato effettivamente ricevuto  $(z'(\mathbf{a}, t))$  e il segnale che il ricevitore avrebbe ricevuto dal canale lineare che esso ipotizza, relativamente alla stessa sequenza trasmessa  $(y'(\mathbf{a}, t))$ . Si può facilmente dimostrare che se il ricevitore avesse una corretta conoscenza del canale, si aspetterebbe di ricevere un segnale modulato non linearmente: sostituendo  $z'(\mathbf{a}, t)$  in luogo di  $y'(\mathbf{a}, t)$  nelle (3.77) e (3.75) si riottiene per la (3.79) la stessa espressione trovata per il ricevitore ottimo per canale non lineare. Viceversa, se il canale fosse esattamente come il ricevitore lo ipotizza, cioè lineare, si potrebbe sostituire  $y'(\mathbf{a}, t)$  in luogo di  $z'(\mathbf{a}, t)$  ottenendo dalla

(3.79) la nota espressione della probabilità di errore a coppie che in questo caso dipenderebbe dalla sola sequenza errore. La quantità  $d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  non può essere identificata con una distanza quadratica in quanto è di segno variabile; valori negativi portano a probabilità di errore maggiori di  $\frac{1}{2}$  e corrispondono a situazioni in cui la sequenza trasmessa su canale non lineare dà luogo ad un segnale che ha minore distanza dal segnale ottenuto dalla sequenza errata  $\hat{\mathbf{a}}$  tramite modulazione lineare, piuttosto che dal segnale ottenuto dalla sequenza corretta  $\mathbf{a}$  tramite modulazione lineare.

Un'ultima nota sulla espressione (3.79) riguarda il fatto che gli errori compiuti equivocando una sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$  con una sequenza errata  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  non avvengono con la stessa frequenza degli errori compiuti "in senso opposto"; ciò è evidente dalla espressione della funzione  $q_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  che assume valore diverso commutando i due argomenti. È possibile dimostrare che, data la coppia di sequenze  $(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$ , la probabilità media di errore, nei due sensi, del ricevitore convenzionale (subottimo) è sempre maggiore di quella del ricevitore ottimo. Per dimostrare questa affermazione supponiamo le due sequenze equiprobabili e di operare in condizioni di basso livello di rumore in modo da poter approssimare le probabilità di commettere un certo errore con la corrispondente probabilità d'errore a coppie. La probabilità di errore media, per il ricevitore ottimo, è

$$P_e^{Opt} \triangleq \frac{1}{2}P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\} + \frac{1}{2}P\{-\mathbf{e}|\hat{\mathbf{a}}\} \simeq Q(x) \quad (3.81)$$

con

$$x \triangleq \frac{d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0}} \quad (3.82)$$

mentre per il ricevitore subottimo

$$P_e^{Sub} \triangleq \frac{1}{2}P\{\mathbf{e}|\mathbf{a}\} + \frac{1}{2}P\{-\mathbf{e}|\hat{\mathbf{a}}\} \simeq \frac{1}{2}Q(x_1) + \frac{1}{2}Q(x_2) \quad (3.83)$$

con

$$x_1 \triangleq \frac{d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0 s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}} \quad (3.84)$$

### 3.3. PRESTAZIONI DI UN RICEVITORE CONVENZIONALE PER CANALE NON LINEARE.

$$x_2 \triangleq \frac{d_2(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}})}{\sqrt{2N_0 s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}} \quad (3.85)$$

Mostriamo dapprima che la variabile positiva  $x$  è sempre superiore al modulo della media aritmetica delle variabili, non necessariamente positive,  $x_1$  e  $x_2$ ; a tale scopo valutiamo la seguente semisomma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) + \frac{1}{2}d_2(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) &= s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) \\ &- \operatorname{Re} \left[ \int (y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t))(z'(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t))^* dt \right] \\ &- \operatorname{Re} \left[ \int (y'(\mathbf{a}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t))(z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\hat{\mathbf{a}}, t))^* dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \int (y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t))(z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - z'(\mathbf{a}, t))^* dt \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

Ricordando la disuguaglianza di Schwartz per cui, date due funzioni  $f(t)$  e  $g(t)$ , in generale complesse, vale la relazione

$$\left| \operatorname{Re} \left[ \int f(t)g^*(t)dt \right] \right| \leq \sqrt{\int |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int |g(t)|^2 dt} \quad (3.87)$$

ed applicandola alla (3.86), si ottiene

$$\begin{aligned} &\left| \operatorname{Re} \left[ \int (y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t))(z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - z'(\mathbf{a}, t))^* dt \right] \right| \\ &\leq \sqrt{\int |y'(\hat{\mathbf{a}}, t) - y'(\mathbf{a}, t)|^2 dt} \sqrt{\int |z'(\hat{\mathbf{a}}, t) - z'(\mathbf{a}, t)|^2 dt} \end{aligned} \quad (3.88)$$

che equivale, con notazione piú compatta, a

$$\left| \frac{1}{2}d_2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) + \frac{1}{2}d_2(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) \right| \leq \sqrt{s^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})} \sqrt{d^2(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})} \quad (3.89)$$

Non è difficile constatare come l'ultima disuguaglianza sia equivalente alla relazione

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq x \quad (3.90)$$

che è quanto ci proponevamo di mostrare.

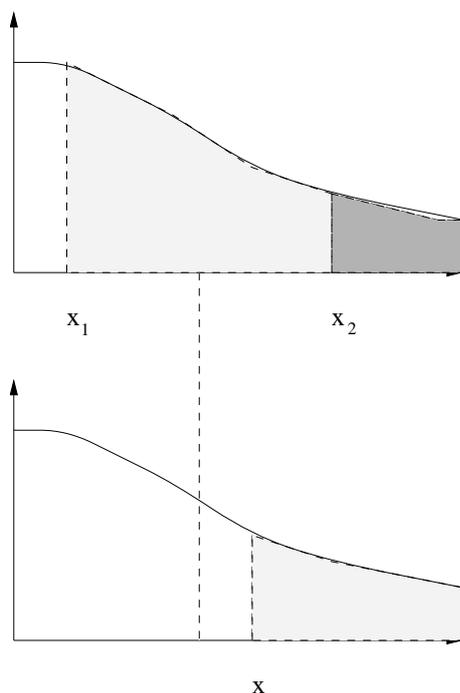


Figura 3.20: Confronto grafico delle probabilità di errore  $P_e^{Ott}$  e  $P_e^{Sub}$

Tornando alle probabilità di errore medie  $P_e^{Ott}$  e  $P_e^{Sub}$ , essendo queste calcolate mediante la funzione  $Q(x_i)$  e ricordando che questa funzione è interpretabile come l'area sottesa da una curva gaussiana a media nulla e varianza unitaria, a partire dal punto  $x_i$  in poi, possiamo individuare, nella figura 3.20, tracciata nel caso  $x_2 > x_1 > 0$ , le aree che corrispondono ai contributi  $Q(x_1)$  e  $Q(x_2)$ , nel grafico superiore, e  $Q(x)$  nel grafico inferiore. È evidente che la  $P_e^{Sub}$ , uguale alla semisomma delle aree  $Q(x_1)$  e  $Q(x_2)$ , è pari al contributo di  $Q(x_2)$  più metà dell'area compresa tra le ascisse  $x_1$  e  $x_2$ , mentre la  $P_e^{Ott}$  è pari al contributo di  $Q(x_2)$  più l'area compresa tra le ascisse  $x$  e  $x_2$ . Avendo dimostrato che  $x$  è maggiore del punto medio tra  $x_1$  e  $x_2$  si capisce come la  $P_e^{Ott}$  sia sempre inferiore alla  $P_e^{Sub}$ , che è quanto volevamo dimostrare.

### 3.3.1 Ottimizzazione del guadagno al ricevitore

L'impiego di un ricevitore concepito per canale linearizzato comporta l'assunzione di un modello lineare del canale. Se il canale reale presenta delle non linearità, il modello adottato dal ricevitore, che risulterà subottimo, dovrà necessariamente essere una approssimazione del canale reale. È intuitivo che tanto migliore è il modello lineare del canale non lineare, tanto meglio le prestazioni del ricevitore subottimo approssimeranno quelle del ricevitore ottimo, fermo restando che persiste un limite intrinseco dovuto all'adozione di un modello di canale differente dalla realtà. Se il canale reale consta, come in figura 3.7, di una cascata di filtri e di un elemento non lineare, facciamo l'ipotesi (arbitraria ma ragionevole) che il modello di canale più idoneo per il progetto del ricevitore consista in un filtro con risposta impulsiva pari alla risposta impulsiva totale della cascata di elementi lineari effettivamente presenti nel canale reale, seguito (o preceduto) da un amplificatore lineare che approssimi il dispositivo non lineare.

La figura 3.21 mostra un modello di canale non lineare ed il segnale  $z'(\mathbf{a}, t)$  che si ottiene in corrispondenza ad una sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$ ; la stessa figura mostra, in parallelo, il modello lineare del canale, dove la risposta impulsiva del filtro  $f(t)$  è pari alla convoluzione di  $p(t)$  ed  $h(t)$ . Il problema che si pone è quello di determinare un valore di  $\alpha$  ottimo in qualche senso. Si potrebbe pensare ad una semplice interpolazione lineare della caratteristica non lineare; si ritiene però che, agli effetti delle prestazioni del ricevitore, sia più significativa una scelta di  $\alpha$  che minimizzi l'errore quadratico medio (EQM) relativo ai segnali osservabili a tempo continuo in uscita dai due modelli di canale. Si vuole quindi minimizzare l'espressione

$$E \left\{ \int |z'(\mathbf{a}, t) - y'(\mathbf{a}, t)|^2 dt \right\} \quad (3.91)$$

Ponendo  $y'(\mathbf{a}, t) = \alpha s(\mathbf{a}, t)$  e derivando l'EQM rispetto ad  $\alpha$  si ottiene il valore ottimo di  $\alpha$

$$\alpha_o = \frac{\int E \{ \text{Re}[z'(\mathbf{a}, t)s^*(\mathbf{a}, t)] \} dt}{\int E \{ |s(\mathbf{a}, t)|^2 \} dt} \quad (3.92)$$

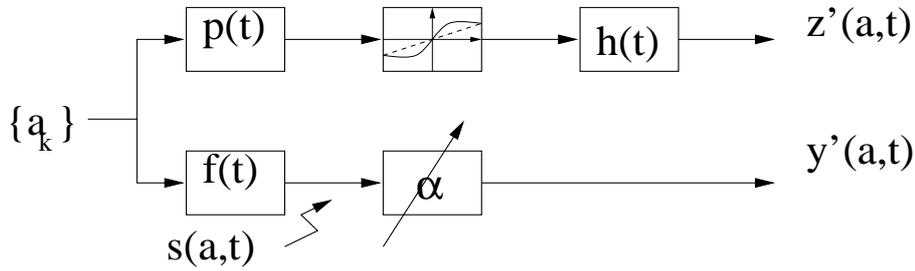


Figura 3.21: Modello di canale non lineare e sua approssimazione lineare

Tale espressione, di applicabilità generale, può essere ulteriormente specificata per i due tipi di canale non lineare presi in considerazione a proposito del ricevitore ottimo.

La figura 3.22 mostra il tipo di canale non lineare senza intersimbolo già considerato e il corrispondente modello lineare assunto dal ricevitore subottimo. Se la non linearità è di tipo cubico, indicando con  $a$  il generico simbolo di informazione, si può esplicitare il valore ottimo di  $\alpha$  come

$$\alpha_o = \gamma_1 \frac{1}{b} + \frac{3}{4} \gamma_3 \frac{1}{b^3} \frac{E\{a^4\} \int f^4(t) dt}{\sigma_a^2 \int f^2(t) dt} \quad (3.93)$$

mentre per una non linearità con caratteristica a limitatore  $F[\cdot]$  si ottiene

$$\alpha_o = \frac{E \left\{ \int a f(t) F \left[ \frac{a}{b} f(t) \right] dt \right\}}{\sigma_a^2 \int f^2(t) dt} \quad (3.94)$$

È evidente la dipendenza di  $\alpha_o$  dal parametro di back-off, nonché dalla costellazione e dal filtro di trasmissione  $f(t)$ .

Nel prossimo paragrafo ci occuperemo della valutazione della probabilità di errore di un ricevitore convenzionale impiegato su canale non lineare, al variare del back-off e della non linearità. Data la non linearità, sarà necessario ottimizzare il valore di  $\alpha$  per ogni valore assunto da  $b$ .

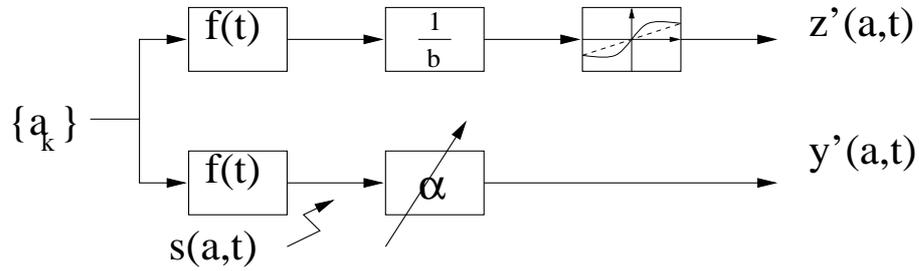


Figura 3.22: Modello di canale non lineare senza intersimbolo e sua approssimazione lineare

### 3.3.2 Relazione tra le prestazioni di ricevitore ottimo e subottimo: ruolo del rumore

Il problema della determinazione di un limite per la probabilità di errore del ricevitore convenzionale subottimo è alquanto complesso. Se si desidera valutare la probabilità di commettere l'errore più frequente è necessario, rifacendosi ai ragionamenti svolti a proposito del ricevitore ottimo, determinare la coppia sequenza errata – sequenza trasmessa  $(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  che minimizza l'argomento della funzione  $Q(\cdot)$  nella (3.79).

Per procedere a tale minimizzazione ci poniamo nelle ipotesi semplificate, già adottate nei paragrafi precedenti, e riassunte in figura 3.23: il filtro di trasmissione  $f(t)$  ha durata limitata all'intervallo di simbolo e la non linearità ha caratteristica  $F[\cdot]$ . In queste ipotesi il ricevitore effettua la stima con modalità simbolo per simbolo e la coppia di sequenze a distanza minima differisce per un solo simbolo errore. Indicando con  $a$ ,  $\hat{a}$  e  $e = \hat{a} - a$  rispettivamente il simbolo trasmesso quello deciso e il relativo errore e ponendo le seguenti definizioni

$$\|\alpha_o f(t)\|^2 \triangleq \int |\alpha_o f(t)|^2 dt \quad (3.95)$$

$$\Upsilon(a) \triangleq \int \alpha_o f(t) \left( F \left[ \frac{a}{b} f(t) \right] - \alpha_o a f(t) \right) dt \quad (3.96)$$

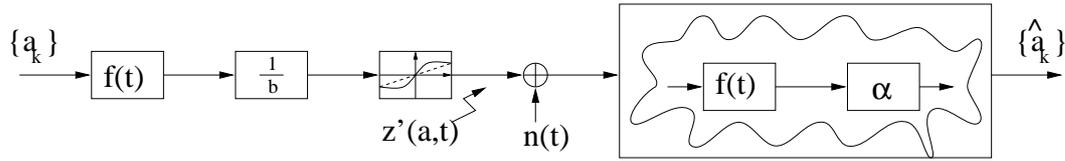


Figura 3.23: Sistema PAM con canale a larga banda e ricevitore subottimo

la quantità da minimizzare assume la forma

$$\frac{d_2(\hat{a}, a)}{s(\hat{a}, a)} = \frac{|e|^2 \|\alpha_o f(t)\|^2 - 2e\Upsilon(a)}{|e| \|\alpha_o f(t)\|} \quad (3.97)$$

La minimizzazione rispetto alla coppia  $(a, e)$  è ora fattibile: derivando rispetto ad  $e$  si ottiene un minimo per  $|e| \rightarrow 0$  mentre il minimo globale si ottiene scegliendo  $a$  in modo da massimizzare in modulo la funzione  $\Upsilon(a)$  e scegliendo un valore di  $e$  a modulo minimo e segno concorde con  $\Upsilon(a)$ . La massimizzazione della  $\Upsilon(a)$  corrisponde intuitivamente alla ricerca del simbolo di costellazione in corrispondenza del quale i due segnali

$$y'(a, t) = \alpha_o a f(t) \quad (3.98)$$

$$z'(a, t) = F \left[ \frac{a}{b} f(t) \right] \quad (3.99)$$

ottenuti dal simbolo  $a$  per modulazione rispettivamente lineare e non lineare, differiscono in misura massima. Si nota quindi come non sia possibile in generale identificare la coppia di simboli piú soggetta ad errori come quella all'estremo della costellazione; rimane confermato il dato intuitivo che l'evento errore piú probabile avviene comunque tra simboli vicini della costellazione ma, come notato precedentemente, la probabilità di equivocare un simbolo  $a$  per un simbolo  $\hat{a}$  non è uguale alla probabilità che si verifichi l'opposto, cosa che invece accade in un ricevitore ottimo.

La figura 3.24 mostra l'andamento della probabilità di equivoco, cioè quella di commettere l'errore piú frequente, (denominata  $P\{e|a\}$  in ordinata), impiegando un ricevitore convenzionale su canale con non linearità cubica, al variare

### 3.3. PRESTAZIONI DI UN RICEVITORE CONVENZIONALE PER CANALE NON LINEARE.

del back-off IBO e del parametro di non linearità  $\xi$ ; tale figura può essere confrontata con la analoga figura 3.15, relativa ad un ricevitore ottimo per il canale non lineare. Come in precedenza le curve relative al valore  $\xi = 0$  sono puramente di riferimento. Il livello di rumore è selezionato in modo da avere una probabilità di equivoco pari a  $10^{-3}$  su canale lineare in assenza di back-off.

La figura 3.25 mostra, in modo analogo alla figura precedente, la probabilità di equivoco del ricevitore convenzionale subottimo nel caso di non linearità a limitatore. Nei grafici sono tracciate, per confronto, le curve relative al ricevitore ottimo per lo stesso canale, già esaminate in figura 3.18. Per il tracciamento delle curve presenti nelle ultime due figure si è reso necessario, in base a quanto considerato nel paragrafo precedente, il calcolo del parametro  $\alpha_o$  di guadagno ottimo del ricevitore, nonché il calcolo del simbolo di costellazione  $a$  soggetto al massimo tasso di errore, per ogni valore di back-off.

Dalle figure si può notare come nel caso di non linearità cubica il divario tra le prestazioni dei due tipi di ricevitore sia sensibile, specialmente per costellazioni dense (8 e 16 PAM). Nel caso di non linearità a limitatore il divario delle prestazioni, una volta ottimizzato il valore del back-off, sembra essere meno sensibile. C'è però da considerare che le curve delle due figure sono tracciate ipotizzando una potenza di rumore relativamente alta. Esiste infatti un divario tra le distanze minime tra segnali, calcolate nel caso di ricevitore ottimo o subottimo. Questo divario è più o meno enfatizzato, nelle curve di prestazione, dal valore assunto da  $N_0$ ; si confrontino ad esempio le espressioni (3.35) e (3.79) in cui, scalando i rispettivi argomenti della funzione  $Q(\cdot)$  di uno stesso fattore, si ottengono valori di probabilità di equivoco la cui differenza è sempre più enfatizzata, al crescere del fattore di scala. C'è da attendersi quindi che tracciando curve analoghe a quelle di figura 3.25, relative a tassi di errore dell'ordine ad esempio di  $10^{-9}$ , e quindi con valori di  $N_0$  molto più piccoli, il divario delle prestazioni dei ricevitori subottimo e ottimo evidenzia sempre più i vantaggi di quest'ultimo.

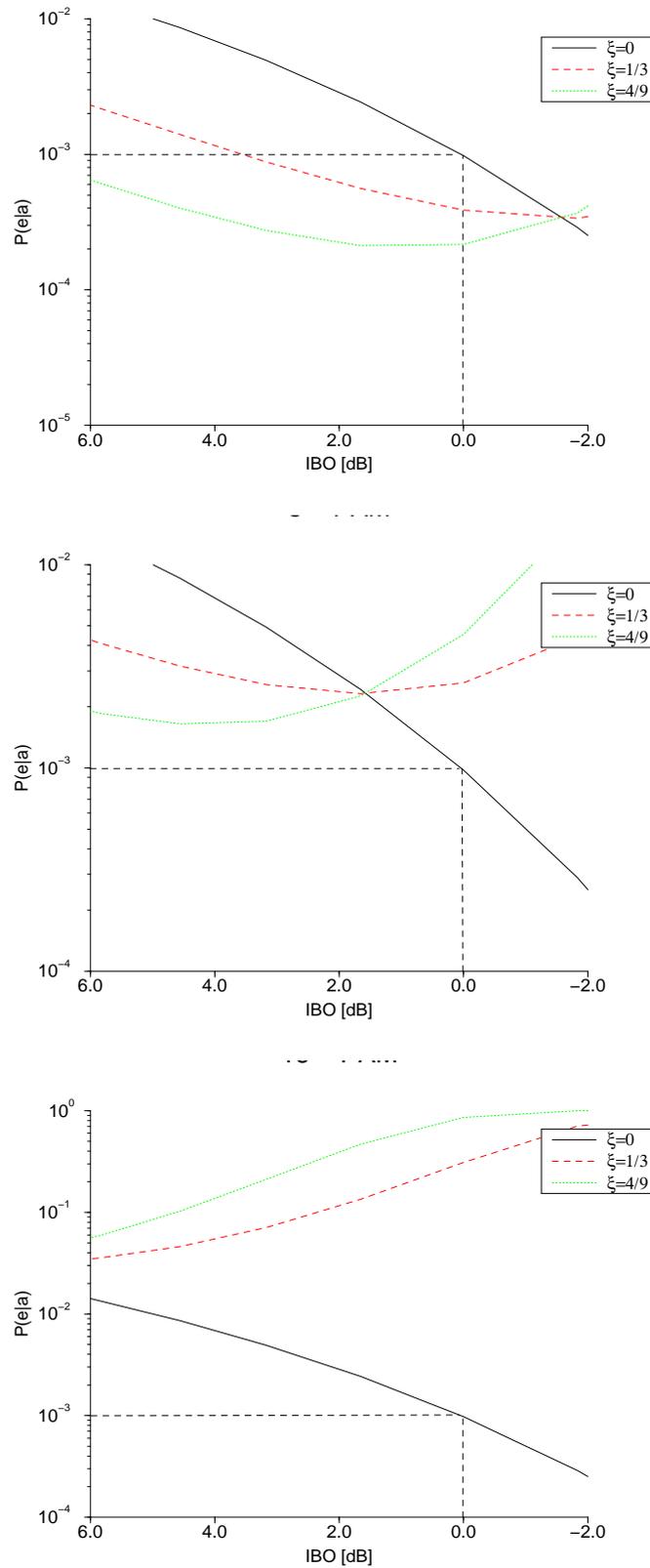


Figura 3.24: Probabilità di equivoco per ricevitore subottimo, al variare di IBO; non linearità cubica

### 3.3. PRESTAZIONI DI UN RICEVITORE CONVENZIONALE PER CANALE NON LINEAR.

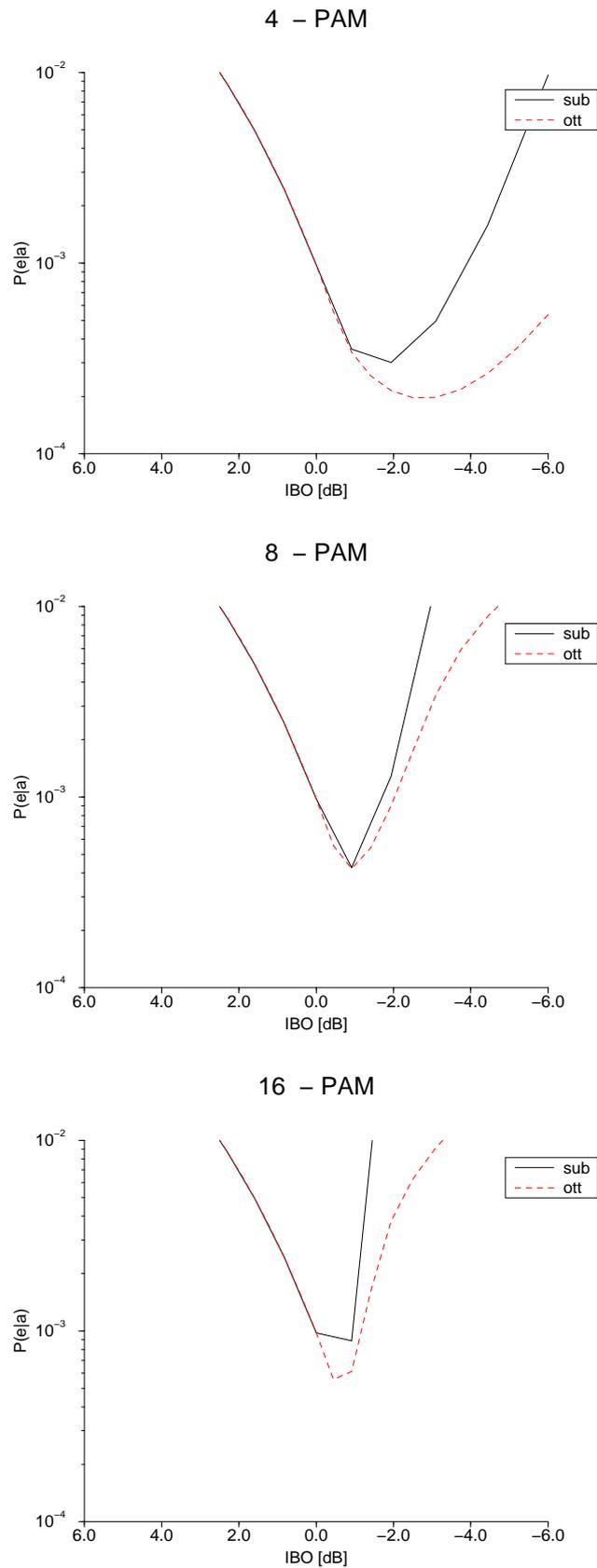


Figura 3.25: Probabilità di equivoco per ricevitore subottimo, al variare di IBO; non linearità a limitatore

### 3.4 Sviluppi ulteriori

Sarebbe necessario a questo punto investigare ulteriormente il divario di prestazioni, analiticamente valutate, dei vari approcci possibili per la stima di sequenza su canale non lineare: predistorsione della non linearità, impiego di un ricevitore subottimo, limitando l'uso della non linearità con un opportuno parametro di back-off, o impiego del ricevitore ottimo. Non approfondiremo, in questa tesi, tutti gli aspetti accennati; piuttosto desideriamo superare le semplificazioni di canale a larga banda e modulazione monodimensionale ( $M$ -PAM) introdotte nei paragrafi precedenti. Ci proponiamo quindi, nei prossimi capitoli, di estendere l'analisi a vari tipi di canale, introducendo la presenza di interferenza intersimbolica.

Avendo dimostrato teoricamente come l'introduzione di distorsioni non lineari non comporti necessariamente un degrado di prestazioni, si ritiene indispensabile una valutazione simulativa delle prestazioni dei vari approcci possibili, con il doppio fine di validare i risultati teorici raggiunti e di estendere tali risultati a situazioni non trattabili analiticamente.

Infine, l'applicazione del ricevitore ottimo con sovracampionamento a canali radio non lineari e tempo varianti esige lo studio di opportune strategie, per rendere il ricevitore adattivo rispetto alle variazioni di canale o alle variazioni temporali del dispositivo non lineare. Per ciò che riguarda l'adattività rispetto al canale radio, nel precedente capitolo 2 si erano svolte alcune considerazioni preliminari circa un possibile metodo per adattare il ricevitore, previa stima dei parametri di canale.

Come già detto, molti aspetti interessanti, quali l'adattività, non saranno approfonditi in questa sede; nel § 5.2.2 sarà invece approfondito l'approccio alla valutazione di prestazioni proposto nel § 3.2. Alla luce dei risultati delle simulazioni, verranno evidenziati i limiti di tale approccio e ne verrà proposta un'estensione idonea per l'analisi di canali non lineari con intersimbolo.

## Capitolo 4

# Analisi di sistema in canali a larga banda

In questo capitolo verrà considerato un sistema di trasmissione del quale è possibile determinare le prestazioni del ricevitore ottimo con sovracampionamento per via analitica. Questo ci permetterà di confrontare i risultati numerici della simulazione con quelli teorici valutando quindi la correttezza di entrambi. Verranno considerati due casi in cui saranno utilizzati due diversi dispositivi non lineari, aventi entrambi curva AM/PM nulla, ma curve AM/AM differenti, uno del tipo cubico, l'altro del tipo a limitatore. La determinazione delle prestazioni teoriche è agevolata sia dal tipo di non linearità considerate (per le quali è nota con esattezza l'espressione della curva AM/AM ed è nulla la curva AM/PM) sia dall'utilizzo di un impulso di trasmissione confinato entro un intervallo di simbolo. Quest'ultima caratteristica permette di non avere effetti di interferenza intersimbolica, semplificando così il calcolo di parametri rilevanti ai fini delle prestazioni, quali la *distanza minima* (si veda il capitolo precedente). Come conseguenza dell'assenza di ISI, il ricevitore ottimo con sovracampionamento effettua una decisione simbolo per simbolo della sequenza trasmessa.

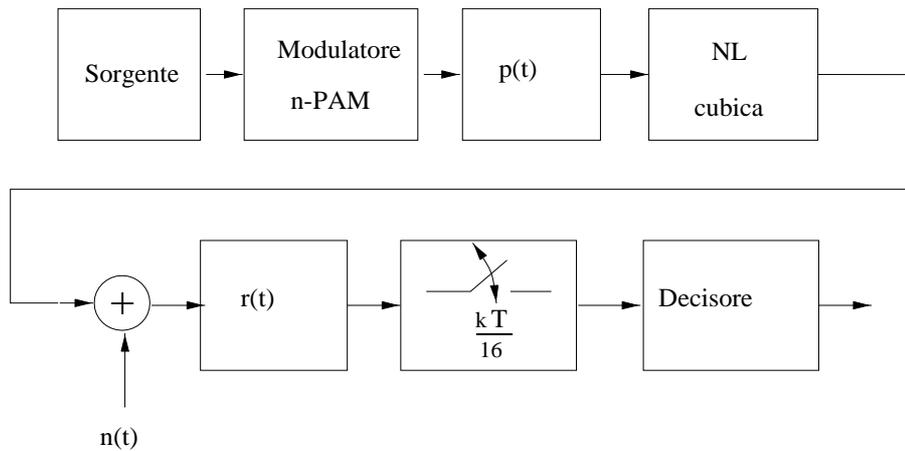


Figura 4.1: Sistema senza ISI

## 4.1 Sistema con non linearità cubica

Il sistema considerato è rappresentato nella figura 4.1. Analizziamo ora le scelte effettuate per i vari blocchi in esso presenti, tenendo presente che la realizzazione delle simulazioni è effettuata mediante il software TOPSIM, sviluppato dal Politecnico di Torino. Si cerca quindi di sfruttare, per quanto possibile, dei blocchi funzionali direttamente disponibili nel sistema di simulazione mentre la realizzazione di funzionalità non disponibili nel software viene sviluppata tramite comandi del linguaggio FORTRAN, direttamente interpretabili dal compilatore TOPSIM. Per una descrizione dettagliata delle funzionalità del simulatore TOPSIM e dei programmi di simulazione impiegati si veda [24].

### 4.1.1 Scelte di sistema

Con riferimento alla figura 4.1, la sorgente fornisce in uscita una successione di simboli con distribuzione di probabilità uniforme. Tali simboli, appartenenti ad una costellazione con valori  $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots\}$ , sono forniti in ingresso ad un modulatore PAM.

Si è utilizzata, per l'uscita del modulatore, una modulazione ad impulsi discreti di ampiezza unitaria, centrati sul secondo campione di ogni intervallo di simbolo  $T$  in modo tale da avere, all'ingresso del filtro di trasmissione, un segnale del tipo  $\sum_k a_k \delta_n(t - (k + \frac{2}{16})T)$ , avendo utilizzato nella simulazione 16 campioni per ogni intervallo di simbolo  $T$  ed essendo  $\delta_n(t)$  l'impulso discreto di ampiezza unitaria.

Il filtro di trasmissione  $p(t)$  è una parte molto importante del sistema; infatti è dalla risposta all'impulso di tale filtro che dipende la presenza o meno di ISI sul segnale che perviene al ricevitore. Per poter applicare in ricezione il metodo del sovracampionamento occorre che lo spettro del segnale all'ingresso della non linearità (NL) sia a banda limitata, mentre per non aver ISI occorre che l'impulso sia confinato entro un intervallo di segnalazione. Queste due necessità sono in contrasto fra loro, per cui si è cercato di ottenere un impulso di trasmissione a banda limitata che avesse dispersione temporale di entità il più possibile trascurabile. Adottiamo quindi, in maniera alternativa agli impulsi di trasmissione esaminati nel § 3.2.2, le scelte descritte di seguito.

Le caratteristiche desiderate del filtro di trasmissione sono state ottenute utilizzando la cascata di tre blocchi opportuni  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ . I filtri numerici  $H_2$  e  $H_3$  sono uguali ed hanno risposta all'impulso del tipo

$$h_2(n) = h_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (4.1)$$

mentre il filtro  $H_1$  è un filtro passabanda di banda bilatera  $\frac{16}{3}f_s$ . I due filtri uguali in cascata danno una risposta all'impulso triangolare formata da 11 campioni diversi da zero con spettro dato da

$$\frac{6}{16f_s} \left( \frac{\text{sen}(\pi f \frac{6}{16f_s})}{\pi f \frac{6}{16f_s}} \right)^2 \quad (4.2)$$

avente il primo zero in  $\frac{16}{6}f_s$ . Il filtro passabanda conserva, quindi, solo il lobo centrale limitando così strettamente la banda.

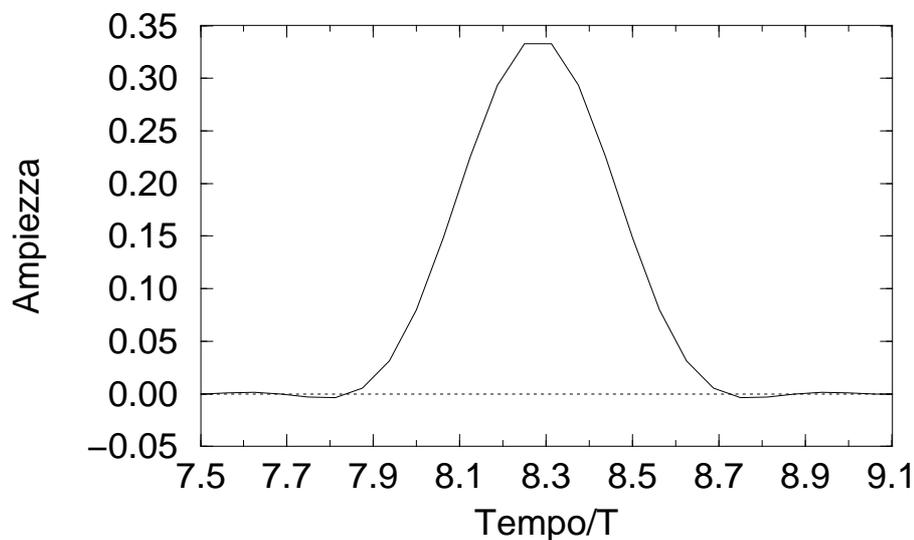


Figura 4.2: Risposta impulsiva  $p(t)$  del filtro di trasmissione. Il tempo è normalizzato alla durata dell'intervallo di simbolo  $T$

Nelle figure 4.2 e 4.3 sono riportate rispettivamente la risposta all'impulso  $p(t)$  e la funzione di trasferimento  $P(f)$  del filtro di trasmissione ottenuto dalla cascata dei tre filtri di cui sopra. Il guadagno del filtro passabanda è stato scelto in modo che il segnale all'ingresso della non linearità NL abbia modulo massimo unitario, allo scopo di portare la NL all'inizio della saturazione in corrispondenza del picco del segnale di ingresso, utilizzandone così l'intera dinamica disponibile.

Nella figura 4.4 è riportato il diagramma ad occhio all'uscita del filtro di trasmissione: come si può notare l'impulso è limitato praticamente ad un intervallo di simbolo e l'ISI è trascurabile.

Per il blocco non lineare NL si è preso in considerazione un dispositivo avente curva AM/PM nulla e AM/AM cubica secondo la relazione  $y = \frac{1}{1-\xi}x - \frac{3}{4} \frac{\xi}{1-\xi}x^3$ , ove  $\xi$  è il parametro di non linearità cubica introdotto nel § 3.2.1.

Il rumore che si somma al segnale utile in ricezione è del tipo gaussiano bianco con densità spettrale di potenza bilatera  $\frac{N_0}{2}$ . Il valore di  $N_0$  è stato

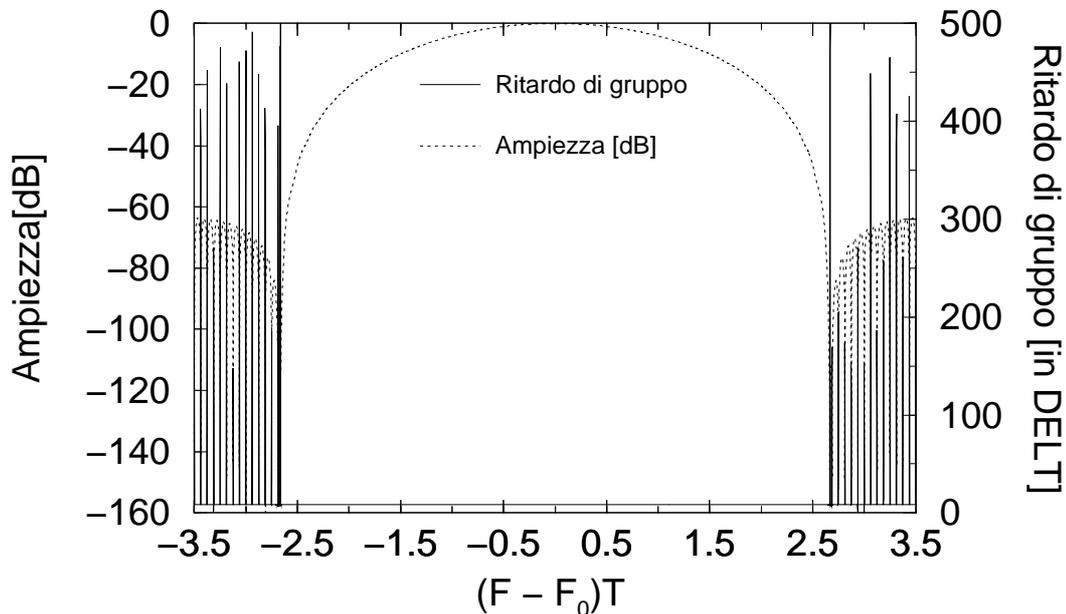


Figura 4.3: Funzione di trasferimento del filtro di trasmissione. La frequenza è normalizzata alla frequenza di segnalazione  $f_s = \frac{1}{T}$ ; il ritardo di gruppo è espresso in numero di campioni presi ad intervallo di campionamento (DELT)

determinato in modo tale da aver probabilità d'errore sul simbolo pari a  $10^{-3}$  nel caso lineare ( $\xi = 0$ ); questo valore dipende dal tipo di modulazione considerata e decresce all'aumentare della densità della costellazione considerata.

A causa della NL cubica il segnale in uscita da essa ha una banda tripla di quella del segnale di ingresso, ossia pari a  $\frac{16}{3}f_s$  (banda bilatera), con  $f_s$  frequenza di simbolo. Per non alterare nessuna componente di tale segnale, come filtro di ricezione è stato scelto un passabanda ideale di banda bilatera pari a  $16f_s$ .

Il tipo di ricevitore ottimo utilizzato nella simulazione è quello con sovracampionamento. Essendo la banda bilatera del segnale dopo il filtro pari a  $16f_s$ , il numero di campioni in ricezione necessari per ricostruire correttamente il segnale ricevuto è pari a 16 per ogni intervallo di simbolo. Non essendo presente il

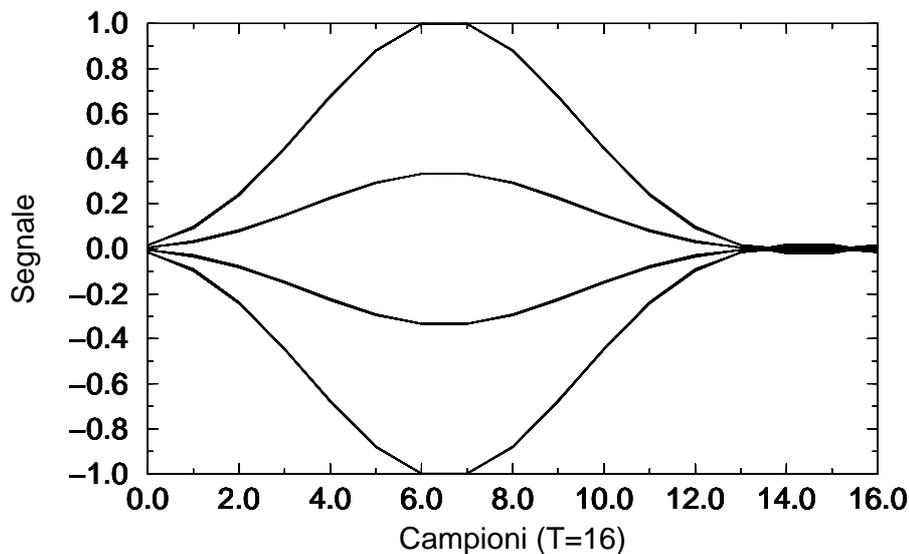


Figura 4.4: Diagramma ad occhio dopo il filtro di trasmissione. Il tempo è espresso in numero di campioni, per cui un intervallo di simbolo  $T$  equivale a 16 campioni

fenomeno dell'ISI (o, meglio, essendo trascurabile), il ricevitore può operare una decisione simbolo per simbolo. Esso deve però fare riferimento a tutti i 16 campioni disponibili piuttosto che ad uno solo, come accade nel classico ricevitore ottimo per canale ideale, laddove i filtri impiegati sono tali da rispettare il primo criterio di Nyquist per l'assenza di interferenza intersimbolica. Nel capitolo 2 è stata determinata l'espressione generale dei campioni del segnale ricevuto, in funzione dei simboli trasmessi e dei filtri utilizzati, relativa al  $\eta$ -esimo campione del  $k$ -esimo intervallo di simbolo; la (3.54) riporta l'espressione del segnale senza rumore atteso dal ricevitore valida nel caso in esame per  $\alpha_1 = 1$  e  $A_M = 1$ . Campionando tale segnale si ottengono i campioni  $z'_\eta$  utilizzati dal ricevitore

$$z'_\eta = \frac{1}{1-\xi} a_k f_\eta - \frac{3}{4} \frac{\xi}{1-\xi} f_\eta^3 a_k^3. \quad (4.3)$$

Per decidere quale simbolo è stato trasmesso con la minima probabilità di

errore, occorre andare a scegliere, fra tutti i possibili simboli, quello che, alla fine di tutti i relativi 16 campioni, presenta metrica minima; l'espressione della metrica da minimizzare rispetto ai vari simboli è data da

$$\sum_{\eta=1}^{16} |z_{\eta} - z'_{\eta}|^2. \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Risultati ottenuti

Dalla simulazione si sono ottenuti tre grafici che riportano l'andamento della probabilità di errore sul simbolo al variare del parametro  $\xi$ , per tre tipi di modulazione diversi: 4, 8 e 16-PAM. In ogni grafico sono riportate le seguenti tre curve:

- A. Bound superiore della probabilità di errore sul simbolo
- B. Bound inferiore della probabilità di errore sul simbolo
- C. Probabilità di errore sul simbolo simulata

I grafici sono riportati nella figura 4.5. Per i limiti superiore ed inferiore sono state utilizzate le espressioni (3.62) e (3.64), rispettivamente.

In tutti e tre i casi considerati, 4, 8 e 16-PAM, si è scelto il valore di  $N_0$  in modo tale da avere probabilità di errore sul simbolo di  $10^{-3}$  nel caso linearizzato, ossia per  $\xi = 0$ . Il fatto che per  $\xi = 0$  la curva sperimentale e il limite superiore non coincidano esattamente è da attribuirsi al grado di precisione con cui è stato determinato il valore di  $N_0$  e alla incertezza del metodo di misura utilizzato per il calcolo di  $P(e)$ .

Dalla figura 4.5 si possono osservare alcuni risultati interessanti. In primo luogo si può notare come all'aumentare delle dimensioni della costellazione, i limiti inferiore e superiore tendano sempre più ad allontanarsi fra loro e ciò è dovuto al fatto che, aumentando i punti della costellazione, le ipotesi su cui si basano le curve limite valgono sempre meno, ossia è sempre meno vero che gli errori fra simboli non adiacenti siano trascurabili.

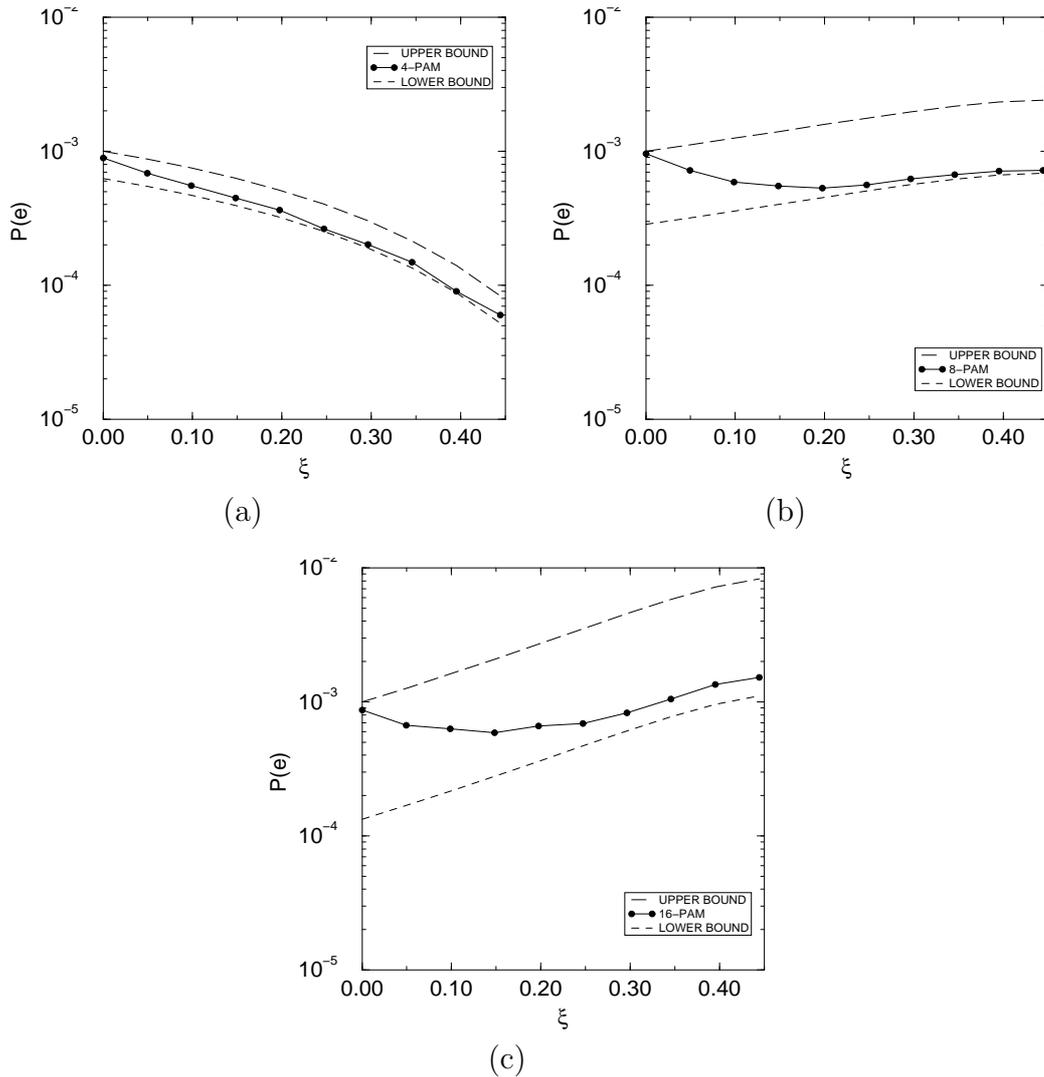


Figura 4.5: Curve di probabilità di errore sul simbolo per 4-PAM (a), 8-PAM (b), 16-PAM (c)

Il particolare andamento sempre decrescente della  $P(e)$  nel caso 4-PAM è dovuto, come specificato nel precedente capitolo, al fatto che, aumentando il grado di non linearità, aumenta la potenza media trasmessa e ciò consente di contrastare meglio l'effetto del rumore al ricevitore; per le costellazioni più dense questo vantaggio inizia, ad un certo punto, ad essere controbilanciato dal

fenomeno della distorsione della costellazione che tende a ridurre la distanza minima e quindi a far peggiorare le prestazioni. Nelle modulazioni 8 e 16-PAM si può notare come la curva della  $P(e)$  mostri un minimo in corrispondenza di valori di  $\xi = 0, 2$  e  $0, 15$ . Ciò è dovuto al fatto che, inizialmente, aumentando  $\xi$  prevale l'effetto dell'aumento di potenza media trasmessa, mentre, dopo il punto di minimo, prevale l'effetto non lineare di riduzione della distanza minima fra i simboli con conseguente peggioramento delle prestazioni. Comunque anche nel caso peggiore considerato, ossia con modulazione 16-PAM e NL con  $\xi = \frac{4}{9}$ , le prestazioni non si discostano sensibilmente da quelle ottenibili nel caso lineare con  $\xi = 0$ .

Dall'andamento delle curve di probabilità di errore ottenute si può notare come queste tendano ad adagiarsi sul limite inferiore calcolato, allontanandosi dal limite superiore abbastanza rapidamente, già per valori di  $\xi$  piccoli; questo significa che appena si esce da un regime quasi-lineare il tipo di errore commesso in prevalenza è quello fra i simboli estremi della costellazione, ossia si confondono, in prevalenza, il simbolo  $(M - 1)$  con  $(M - 2)$  (e viceversa) e  $-(M - 1)$  con  $-(M - 2)$  (e viceversa).

## 4.2 Sistema con non linearità a limitatore

In questo paragrafo verrà considerato un sistema di trasmissione simile a quello del paragrafo 4.1 in cui però la non linearità utilizzata sarà del tipo a limitatore. Anche in questo caso lo scopo è di ottenere le curve di probabilità di errore sul simbolo da confrontare con i limiti teorici disponibili. Tali curve sono però determinate in funzione di un diverso parametro rispetto al caso precedente, ovvero in funzione del livello di saturazione a cui viene utilizzata la NL.

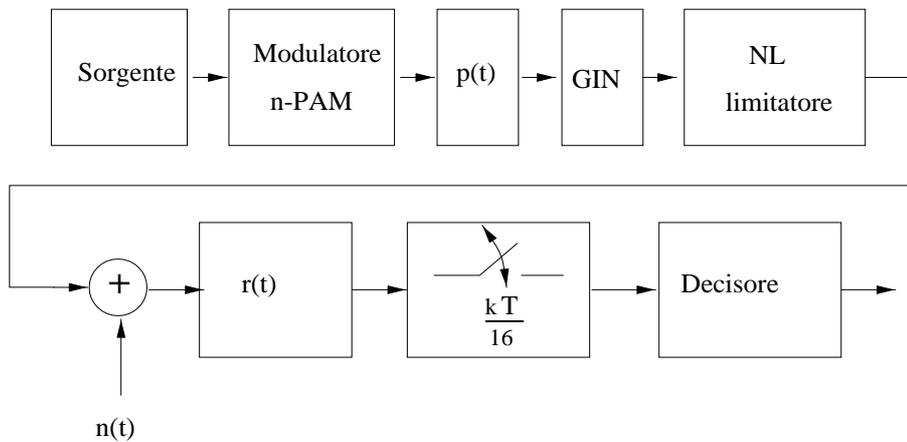


Figura 4.6: Sistema senza ISI

### 4.2.1 Realizzazione del sistema

Nella figura 4.6 è riportato lo schema a blocchi del sistema considerato; tale sistema differisce da quello della figura 4.1 del § 4.1 solo per il tipo di non linearità utilizzato e per la presenza di un blocco di guadagno di ingresso GIN, impiegato come fattore di back-off, avente lo scopo di poter far lavorare la NL con diversi gradi di saturazione. La NL utilizzata presenta curva AM/PM nulla mentre la curva AM/AM, del tipo a limitatore, è riportata nella figura 4.7. Per  $GIN = 1$  il massimo del modulo dell'involuppo complesso del segnale all'ingresso della NL ha valore unitario per cui il dispositivo lavora in zona completamente lineare.

Con questo tipo di NL si ottiene un'espansione della larghezza di banda molto superiore a quella che si ottiene con NL del tipo cubico e ciò produce una serie di problemi che non si presentano per il caso trattato nel § 4.1. Il problema principale è legato al filtro di ricezione; infatti, essendo il fattore di allargamento di banda molto elevato, il filtro di ricezione deve avere una banda teoricamente infinita affinché dai campioni osservati si possa ricostruire correttamente il segnale privo di rumore in ingresso al ricevitore. Volendo però

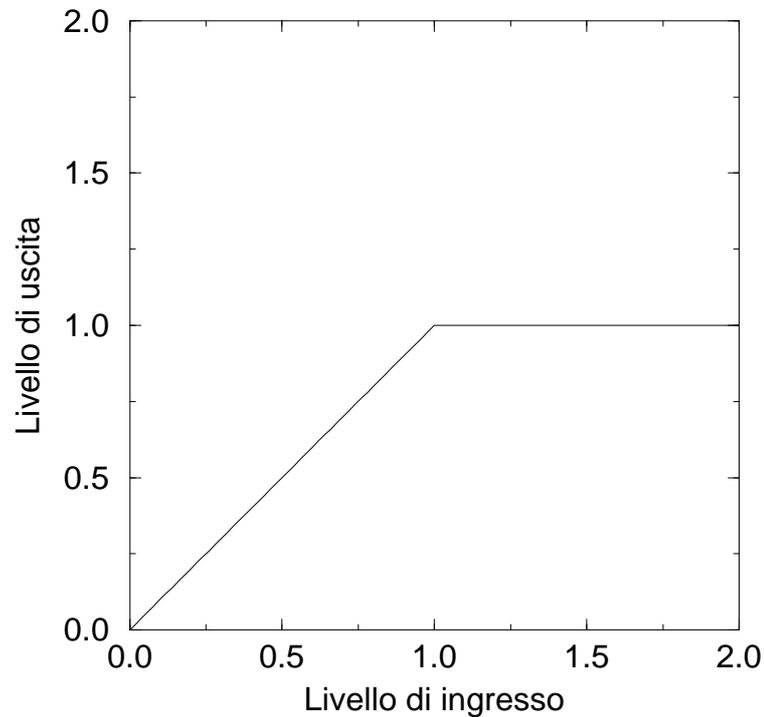


Figura 4.7: Curva AM/AM per NL a limitatore

utilizzare il ricevitore con fattore di sovracampionamento finito, il filtro deve essere scelto con banda finita e ciò implica una certa perdita di informazione sul segnale in ricezione che va a scapito delle prestazioni ottenibili.

Si è deciso inizialmente di mantenere come filtro di ricezione un passa-banda ideale di banda tripla rispetto a quella dell'impulso di trasmissione, come era stato fatto nel caso di NL cubica, in modo tale da dover cambiare solo l'espressione dei campioni attesi dal ricevitore, lasciando invariati i vari ritardi presenti nel sistema ed il numero di campioni per simbolo (pari a 16). Limitando però la banda del segnale col filtro di ricezione a banda finita, si ottiene che il segnale, salvo il contributo di rumore, presente all'ingresso del campionatore non risulta essere uguale a quello che si ottiene all'uscita della NL e

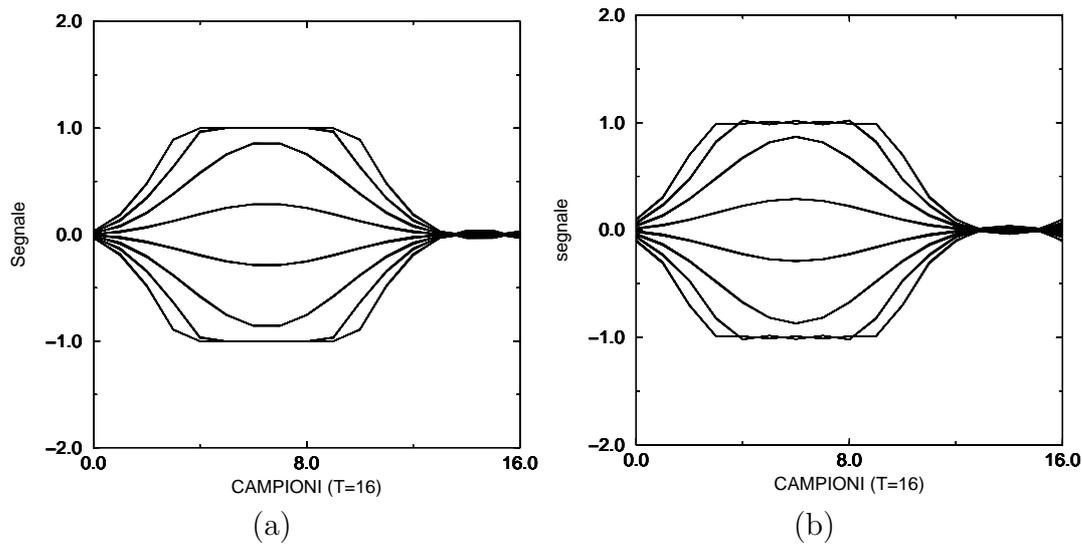


Figura 4.8: Diagramma ad occhio prima (a) e dopo (b) il filtro di ricezione con  $GIN = 2$

questo complica notevolmente il progetto e l'analisi di prestazioni del ricevitore. Infatti in questo caso i campioni del segnale attesi al ricevitore, in assenza di rumore, cioè gli  $z'_\eta$ , vengono a dipendere dal particolare valore di guadagno  $GIN$  e dal simbolo trasmesso tramite equazioni non note analiticamente ed andrebbero quindi determinati sperimentalmente per ogni valore del back-off. Questo fatto renderebbe molto noioso e lungo il lavoro al variare del guadagno  $GIN$ , in quanto tale simulazione non potrebbe essere fatta in modo completamente automatico.

Da un confronto dei diagrammi ad occhio prima e dopo il filtro di ricezione ci si è resi conto che questa complicazione si poteva evitare. Nella figura 4.8 è riportato, come esempio, il diagramma ad occhio prima e dopo il filtro di ricezione nel caso di guadagno  $GIN$  pari a 2. Come si può notare le differenze sono sostanzialmente dovute al ripple che si presenta nella zona in cui la NL lavora in saturazione e non sono poi così marcate. Questo fatto ha consentito di utilizzare un ricevitore sub-ottimo in cui la determinazione dei campioni  $z'_\eta$  è molto semplice ed ottenibile automaticamente al variare del guadagno  $GIN$

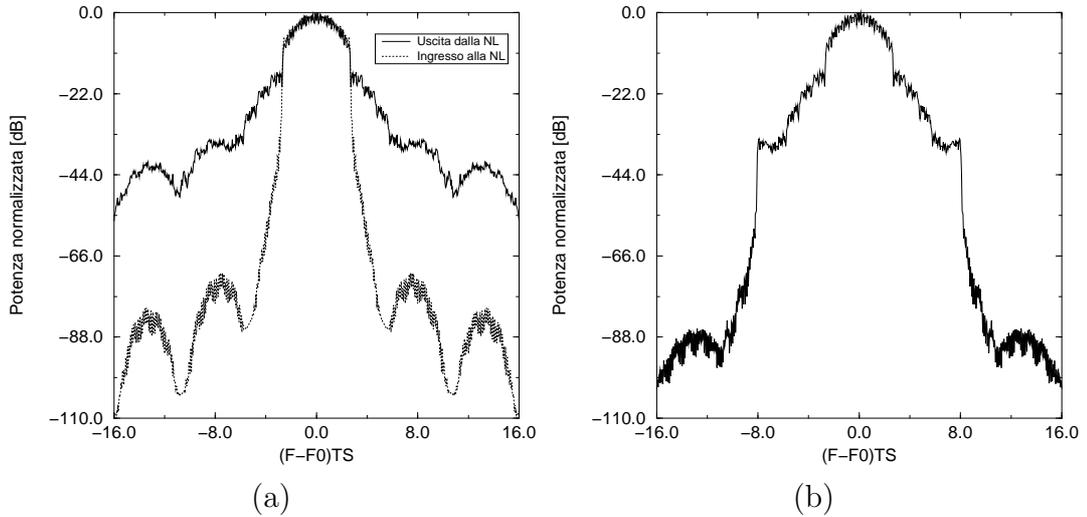


Figura 4.9: Spettri prima e dopo la NL (a) e all'uscita del filtro di ricezione (b) con  $GIN = 2$  e modulazione 8-PAM. Il valore a centobanda è stato normalizzato a 0 dB

e del simbolo trasmesso. In questo ricevitore gli  $z'_\eta$  utilizzati sono quelli che verrebbero usati da un ricevitore ottimo con filtro di ricezione a banda teoricamente infinita e vengono però confrontati con i campioni del segnale ricevuto dopo il filtro di ricezione. L'espressione dei campioni attesi è la seguente:

$$z'_\eta = \begin{cases} 1 & \text{se } a_k f_\eta \geq 1 \\ -1 & \text{se } a_k f_\eta \leq -1 \\ a_k f_\eta & \text{altrove} \end{cases} \quad (4.5)$$

ove  $a_k$  è il simbolo che si suppone essere stato trasmesso e  $f_\eta$  è il campione  $\eta$ -esimo della risposta impulsiva totale del sistema senza NL. L'espressione degli  $z'_\eta$  si può spiegare facilmente: il valore  $a_k f_\eta$  rappresenta il valore del campione  $\eta$ -esimo all'ingresso della NL, per cui se tale valore in modulo è minore di 1 significa che ci si trova ad operare nella zona lineare della caratteristica NL e quindi esso è direttamente il valore che il ricevitore deve attendere; se  $a_k f_\eta$  è maggiore di 1 allora la NL lo limita al valore 1 e se è inferiore a -1 la NL lo limita al valore -1.

Riassumendo, questo ricevitore risulta essere sub-ottimo per due motivi: da un lato, come già spiegato, non vengono usati come  $z'_\eta$  i valori veri ma quelli indicati nell'espressione (4.5), mentre dall'altro a causa della banda limitata del filtro di ricezione non è possibile ricostruire correttamente il segnale a banda infinita prodotto dalla non linearità.

L'effetto sullo spettro del segnale causato dalla NL è visibile nella figura 4.9 ove sono riportati gli spettri del segnale all'ingresso e all'uscita della NL; da questa figura si può notare il fenomeno di allargamento della banda subito dal segnale nell'attraversare il dispositivo non lineare. Con il filtro di ricezione di banda  $16f_s$  già utilizzato nel § 4.1, il segnale che compare all'ingresso del ricevitore ha uno spettro che coincide con quello all'uscita della NL solo per valori di  $F - F_0$  compresi fra  $-\frac{8}{T}$  e  $\frac{8}{T}$  mentre al di fuori di tale intervallo esso viene attenuato di circa 40 dB come si può notare dalla figura 4.9.

### 4.2.2 Risultati ottenuti

Scopo della simulazione è stato quello di produrre le curve della probabilità di errore sui simboli  $P(e)$ , al variare del guadagno GIN, per le modulazioni 4, 8 e 16-PAM. Queste curve sono state poi confrontate ancora con i limiti superiore ed inferiore teorici assunti coincidenti con le espressioni (3.62) e (3.64), rispettivamente, dove stavolta la distanza minima varia in funzione del back-off secondo la (3.66).

#### Risultati per ricevitore a 16 campioni per intervallo di simbolo

In questo paragrafo vengono trattati i risultati delle simulazioni utilizzando 16 campioni per intervallo di simbolo e filtro di ricezione con banda  $16f_s$ . Nella figura 4.10 sono riportate le curve di SER per le modulazioni 4, 8 e 16-PAM senza l'indicazione dei valori teorici dei limiti superiore ed inferiore. I limiti teorici non sono stati riportati poiché già dai valori simulati si ottengono curve inaccettabili in quanto le oscillazioni che esse presentano lasciano supporre che

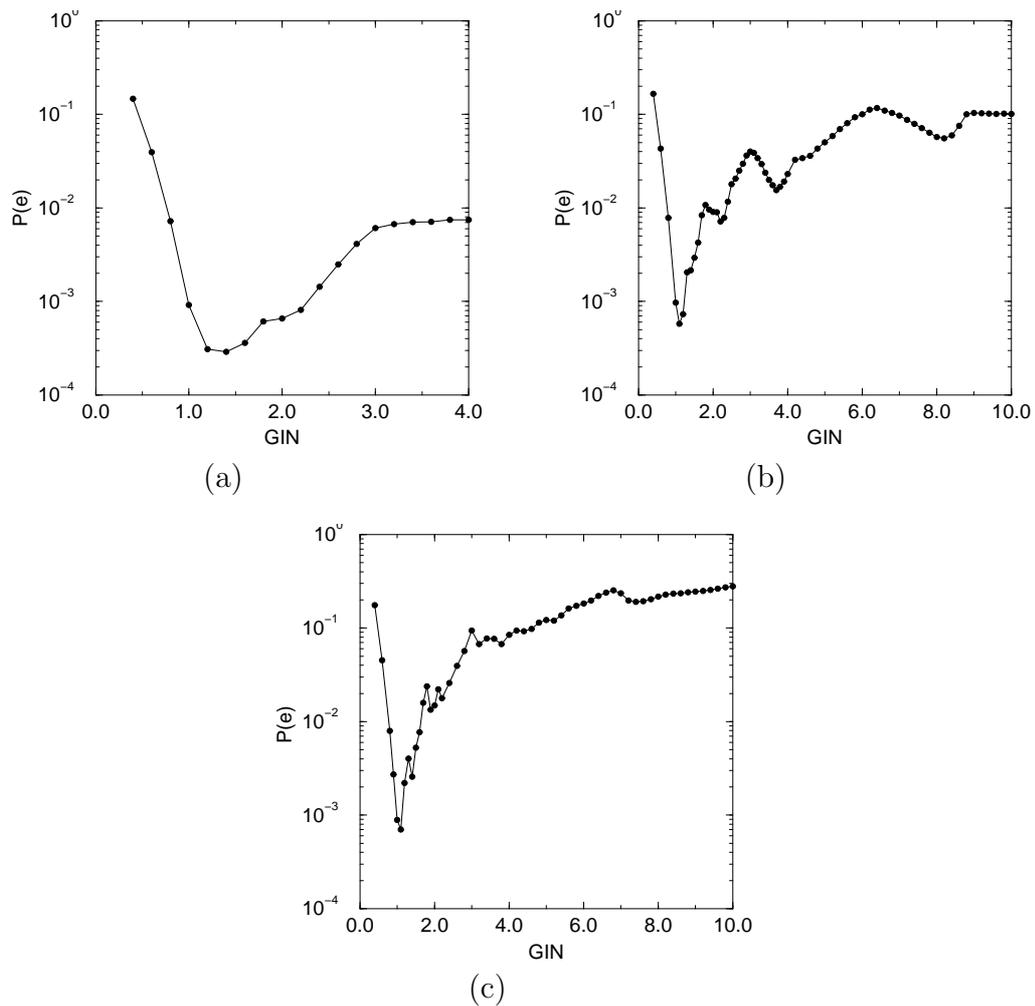


Figura 4.10: Curve di probabilità d'errore sul simbolo per 4-PAM (a), 8-PAM (b) e 16-PAM (c) con 16 campioni per intervallo di simbolo

sia presente qualche fenomeno indesiderato. Dall'analisi di alcuni diagrammi ad occhio prima e dopo la NL ci si è resi conto che le differenze esistenti non potevano dare origine a tali oscillazioni; inoltre esaminando più a fondo gli errori commessi, ci si è resi conto che gli errori non erano simmetrici, ossia che, per esempio con riferimento alla costellazione 8-PAM, il numero di decisioni per il simbolo +7 condizionatamente alla trasmissione del simbolo +5 era molto di-

verso dal numero di decisioni per il simbolo +5 condizionatamente alla trasmissione del simbolo +7. Questi effetti sono stati spiegati imputandoli al fatto che il ricevitore utilizzato è un ricevitore non ottimo ma sub-ottimo per i motivi già enunciati. Inoltre, all'aumentare del valore di GIN, ossia all'aumentare del grado di saturazione a cui si utilizza la NL, le differenze fra i diversi impulsi trasmessi dal dispositivo NL, relativamente ai diversi simboli, risultano apprezzabili soltanto in corrispondenza dei fronti di salita e di discesa degli impulsi stessi, in quanto per il resto della propria durata essi assumono i valori di saturazione 1 o  $-1$  e risultano quindi indistinguibili. Questo comporta che il ricevitore può distinguere i simboli solo grazie ai 4 campioni che si trovano in corrispondenza dei fronti; ciò rende poco attendibili le decisioni sui simboli ricevuti e può spiegare il fenomeno delle oscillazioni ottenute nelle curve sperimentali.

### **Risultati per ricevitore a 32 campioni per intervallo di simbolo**

Per cercare di eliminare i fenomeni oscillatori presenti nelle curve di SER riportate nella figura 4.10, si è deciso di modificare leggermente il ricevitore ed il filtro di ricezione. In particolare, da un lato si è aumentato il numero di campioni per intervallo di simbolo estratti dal campionatore presente nel ricevitore, portandolo da 16 a 32, in modo da aumentare il numero dei campioni che si trovano sui fronti di salita e di discesa nel diagramma ad occhio, consentendo quindi una migliore distinguibilità fra simboli adiacenti; dall'altro lato si è raddoppiata la banda del filtro di ricezione ( $32f_s$ ), offrendo così in ingresso al campionatore un segnale con maggior contenuto informativo. Ciò implica ovviamente una banda disponibile sul canale fisico di gran lunga superiore alla frequenza di segnalazione; come già detto, non ci curiamo in questo contesto delle limitazioni imposte dal canale fisico, supponendolo a larghissima banda e non selettivo in frequenza.

Nella figura 4.11 sono riportati i risultati delle simulazioni e i relativi limiti inferiori e superiori teorici per modulazione 4, 8 e 16-PAM.

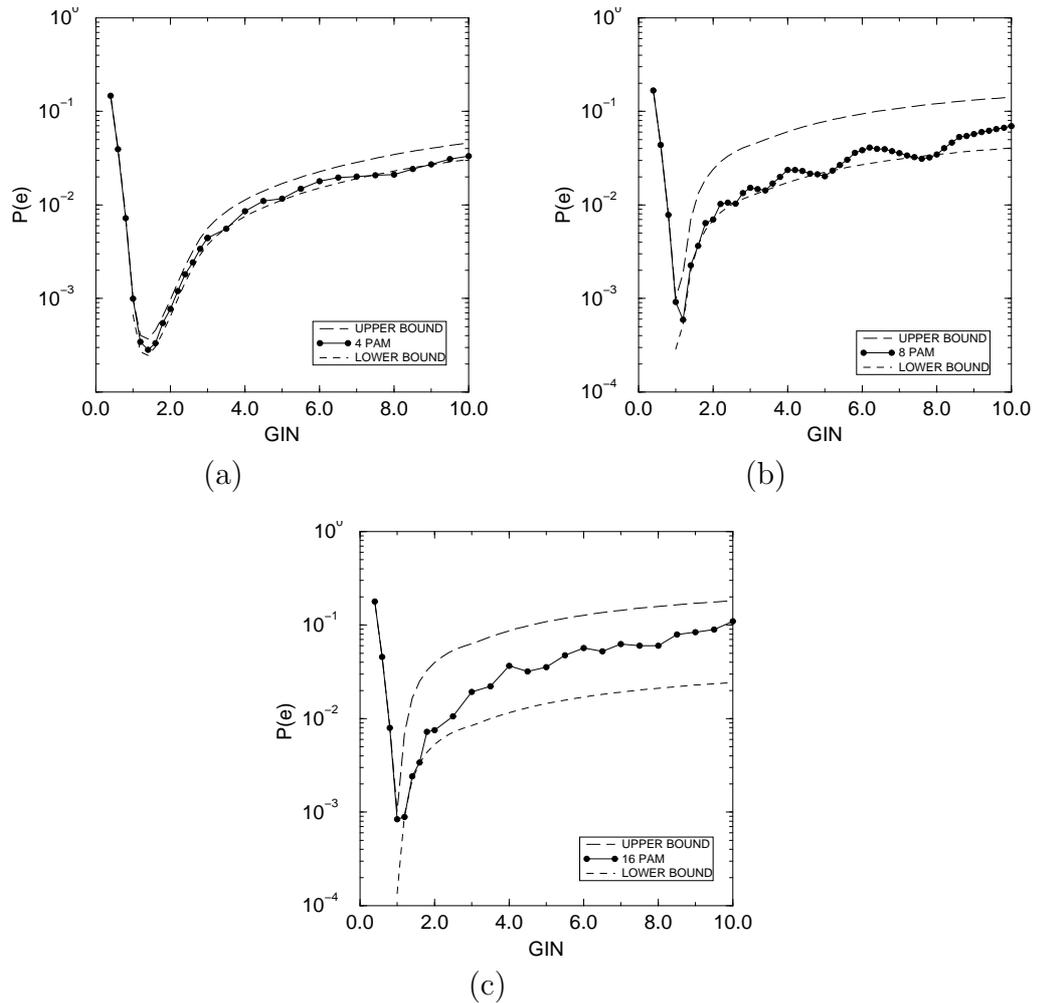


Figura 4.11: Curve di probabilità d'errore sul simbolo per 4-PAM (a), 8-PAM (b) e 16-PAM (c) con 32 campioni per intervallo di simbolo

### Conclusioni sui risultati ottenuti

Come si può vedere dal confronto fra le curve ottenute utilizzando 32 campioni per intervallo di simbolo e filtro di ricezione con banda pari a  $32f_s$  e quelle ottenute utilizzandone 16 e filtro di ricezione con banda  $16f_s$ , si ha un miglioramento delle prestazioni ed un avvicinamento alle prestazioni teoriche relative ad un ricevitore ottimo (con banco di filtri adattati) in cui il decisore abbia

a disposizione l'intero spettro del segnale dopo la NL e non solo la porzione filtrata dal filtro di ricezione a banda limitata.

Per tutti e tre i tipi di modulazione considerati, si nota una riduzione delle oscillazioni sulla curva sperimentale e ciò è da attribuirsi al miglioramento del ricevitore ed al suo avvicinarsi al ricevitore ottimo. Inoltre si può notare come le prestazioni si allontanino dal limite superiore (ipotesi di probabilità di errore a coppie fra simboli adiacenti uniforme ed uguale al caso peggiore) già per valori di GIN poco superiori a 1, ossia per NL che lavorano poco nella zona di saturazione, e si avvicinino al limite inferiore (probabilità di errore a coppie fra simboli adiacenti nulla salvo per i 4 simboli estremi della costellazione).

Il fatto che in alcuni punti si abbiano risultati simulati migliori del limite inferiore teorico previsto e che vi sia comunque ancora una certa oscillazione sulla curva di SER sperimentale si può attribuire al tipo di ricevitore sub-ottimo che utilizza valori di  $z'_\eta$  che non sono quelli corretti ma solo una loro approssimazione. Allargando sempre di più la banda del filtro in ricezione ed aumentando di conseguenza il numero di campioni per intervallo di simbolo, si dovrebbe avere una riduzione delle oscillazioni e la curva dovrebbe mantenersi strettamente fra i due limiti teorici.

Escludendo il fenomeno di oscillazione e di intersezione con il limite inferiore, le curve presentano un andamento che è possibile spiegare da un punto di vista teorico; per far ciò è necessario ricordare il significato dei limiti teorici e come sono stati ottenuti. Come spiegato nel precedente capitolo, il limite superiore è stato calcolato supponendo trascurabile la probabilità di confondere fra loro simboli non adiacenti, supponendo che la distanza fra simboli adiacenti sia la stessa per ogni coppia di simboli e che sia uguale alla distanza minima fra tutte le possibili coppie di simboli, mentre il limite inferiore è stato determinato supponendo di commettere errori solo fra i simboli estremi della costellazione, che risultano essere quelli a minima distanza. Per tutte le modulazioni considerate si ha che, in zona lineare, cioè per  $\text{GIN} \leq 1$ , le curve simulate coincidono con la curva del limite superiore e questo è prevedibile, in quanto in zona lineare

le ipotesi fatte per ricavare tale limite risultano valide (proprietà di uniformità dell'errore); il limite superiore e la curva simulata sono quindi sovrapposte e presentano entrambe un andamento a funzione  $Q(\cdot)$  come previsto dalla teoria. La coincidenza delle curve relative a tre diverse costellazioni di simboli è dovuta ancora una volta, come nel caso di sistema con non linearità cubica, alla particolare scelta della densità spettrale di rumore ( $N_0$ ), come verrà evidenziato di seguito. In zona di saturazione ( $\text{GIN} \geq 1$ ), invece, i tre tipi di modulazione hanno comportamenti diversi. Dalla figura 4.11 si può notare come, nel caso 4-PAM, la curva simulata segua, senza eccessivi scostamenti (escluso le ondulazioni), la curva del limite inferiore e questo è dovuto al fatto che all'aumentare della saturazione i due simboli adiacenti positivi della costellazione si avvicinano sempre più fra loro e si allontanano sempre più dai due simboli negativi e quindi gli errori avvengono di fatto solo fra simboli adiacenti estremi, come previsto dalle ipotesi utilizzate per ottenere il limite inferiore. La situazione per la 8 e la 16-PAM è diversa. In questi casi, per valori di  $\text{GIN} > 1$  le curve sperimentali prima si avvicinano al limite inferiore e poi se ne allontanano. Questo si può spiegare osservando che, per bassi valori di  $\text{GIN}$ , entrano in saturazione solo i simboli più estremi per cui si tende a sbagliare solo fra questi e di conseguenza ci si avvicina alle ipotesi per cui è calcolato il limite inferiore. Aumentando il guadagno  $\text{GIN}$ , cominciano ad entrare in saturazione anche simboli più interni; questo comporta la possibilità di confondere fra loro un numero maggiore di simboli e non solo quelli adiacenti ed estremi, per cui la probabilità di errore aumenta rispetto al limite inferiore teorico, poiché vengono a cadere le ipotesi su cui si è basato il calcolo di tale limite. Chiaramente, questo effetto è più sensibile per la modulazione 16-PAM piuttosto che per la 8-PAM, poiché, essendo maggiore la cardinalità della costellazione, si hanno più simboli adiacenti che possono essere confusi fra loro.

Molto importante è il comportamento che il sistema presenta quando si esce dalla zona lineare. Per valutare correttamente tale comportamento occorre ricordare che il rumore è stato scelto con densità spettrale tale da fornire una

probabilità di errore pari a  $10^{-3}$ , per  $GIN = 1$ ; questo livello di probabilità di errore è quello che si otterrebbe per ogni valore di  $GIN$  se si usasse un predistorsore per linearizzare la NL fino al punto di massimo utilizzo. Dai risultati ottenuti si può dedurre che, con una modulazione 4-PAM, è più conveniente utilizzare il ricevitore ottimo con sovracampionamento piuttosto che linearizzare il dispositivo NL, almeno finché si mantiene il parametro  $GIN$  ad un valore inferiore a circa 2.4; all'aumentare della densità della costellazione tale convenienza viene meno come si può notare dalla figura 4.11 nel caso 8 e soprattutto 16-PAM.

# Capitolo 5

## Analisi di sistema in canali a banda stretta

In questo capitolo verrà preso in considerazione un sistema di trasmissione nel quale è presente un canale a banda stretta, ovvero con banda comparabile con la frequenza di segnalazione, ed un dispositivo non lineare avente caratteristiche AM/AM ed AM/PM consistenti, inizialmente, in una approssimazione al terzo ordine delle caratteristiche relative all'amplificatore a semiconduttore modello 606-037/76b utilizzato dalla Italtel S.p.A. e, successivamente, nelle caratteristiche reali dell'amplificatore stesso. A causa della banda limitata del filtro di canale, la risposta all'impulso complessiva della cascata di filtro di trasmissione e canale ha una durata efficace superiore all'intervallo di simbolo, per cui è presente interferenza intersimbolica che viene tenuta in considerazione in ricezione tramite il ricevitore a stima di sequenza con sovracampionamento descritto nel capitolo 2.

Lo scopo che ci si prefigge è quello di confrontare fra loro le prestazioni (in termini di probabilità di errore sul simbolo al variare della densità spettrale di potenza del rumore) delle tre configurazioni seguenti:

- A. canale con NL cubica e ricevitore ottimo per la NL cubica;

- B. canale linearizzato, mantenendo costante la dinamica del segnale di ingresso e la potenza di picco disponibile (pari al valore massimo che l'amplificatore di cui sopra può fornire) e ricevitore ottimo convenzionale per canale lineare;
- C. canale con NL cubica e ricevitore ottimo convenzionale per canali lineari.

Dopo questo confronto si è passati a considerare le prestazioni ottenibili dai tre sistemi di cui sopra nel caso in cui venga utilizzato come dispositivo non lineare l'amplificatore Italtel invece della sua approssimazione al terzo ordine; in questo caso il ricevitore della prima configurazione non sarà quello ottimo per questo tipo di NL, ma sarà quello ottimo per l'approssimazione cubica. Un ricevitore ottimo per tale tipo di non linearità dovrebbe essere progettato sulla base di una approssimazione polinomiale di grado opportuno (quinto, settimo, ecc.) della non linearità; si preferisce evitare tale aumento di complessità nel ricevitore anche al fine di valutare la penalizzazione introdotta dalla nuova non linearità rispetto alla configurazione ottimale A. descritta sopra.

Infine si esaminerà il caso di NL Italtel e ricevitore ottimo per NL cubica oppure ricevitore convenzionale per canale lineare. Entrambe le scelte per il ricevitore risultano subottime per tale canale: si vogliono determinare le prestazioni ottenibili impiegando un fattore di back-off che consenta l'utilizzo dell'amplificatore in zona quasi lineare, per determinare eventualmente un punto di utilizzo ottimale dell'amplificatore stesso.

## 5.1 Realizzazione del sistema

Nella figura 5.1 è riportato lo schema a blocchi del sistema in esame. Essa differisce dalle figure 4.1 e 4.6 principalmente per la presenza di un filtro di canale  $h(t)$  e, come conseguenza, per il fattore di sovracampionamento. La modulazione utilizzata è la 16-QAM con simboli aventi componenti in fase ed in quadratura di valori  $\pm 1, \pm 3$  come mostrato nella figura 5.2.

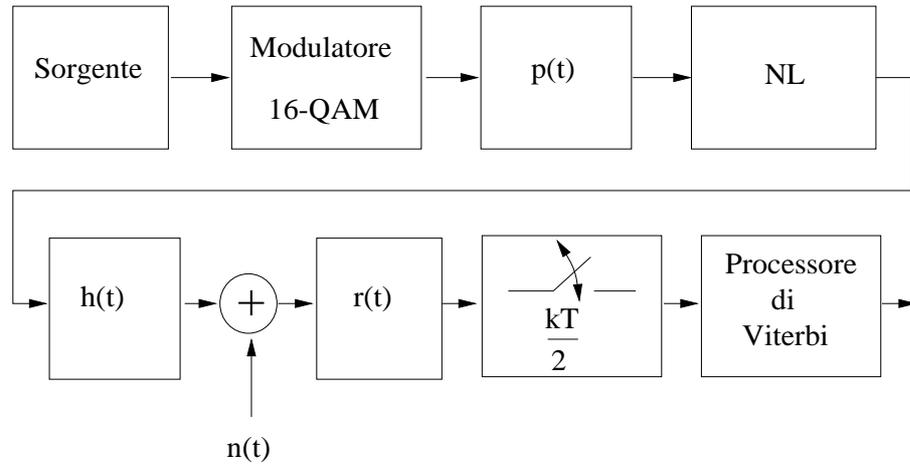


Figura 5.1: Sistema con canale a banda stretta

Il canale  $h(t)$  è assunto essere un filtro passabanda ideale di banda  $\frac{2}{T}$ , il cui scopo è quello di limitare la banda del segnale dopo la NL che, rispetto alla banda del segnale in ingresso al blocco NL, viene allargata di un fattore 3 nel caso della approssimazione cubica e di un fattore superiore, teoricamente infinito ma praticamente limitato a circa 5, nel caso del dispositivo reale. Dal punto di vista pratico tale limitazione è necessaria per potere soddisfare le condizioni imposte dalle normative internazionali sugli spettri di emissione delle antenne trasmettenti. In realtà tali limitazioni sono più stringenti e richiedono banda più stretta rispetto a quella utilizzata per  $h(t)$ ; inoltre l'uso di un filtro passa-banda ideale come filtro sagomatore di spettro a radiofrequenza è ovviamente irrealistica. Ciononostante, poiché l'effetto del filtraggio dovuto ad  $h(t)$  è quello di evidenziare il fenomeno dell'ISI, aumentando la durata temporale dell'impulso totale, e quindi di richiedere maggiore complessità per il ricevitore, inizialmente si mantiene una banda più larga per  $h(t)$  al fine di avere un canale meno dispersivo e quindi un ricevitore meno complesso. In questo modo, inoltre, il processore di Viterbi può lavorare in maniera ottimale senza dovere utilizzare tecniche di riduzione di complessità che conducono, inevitabilmente,

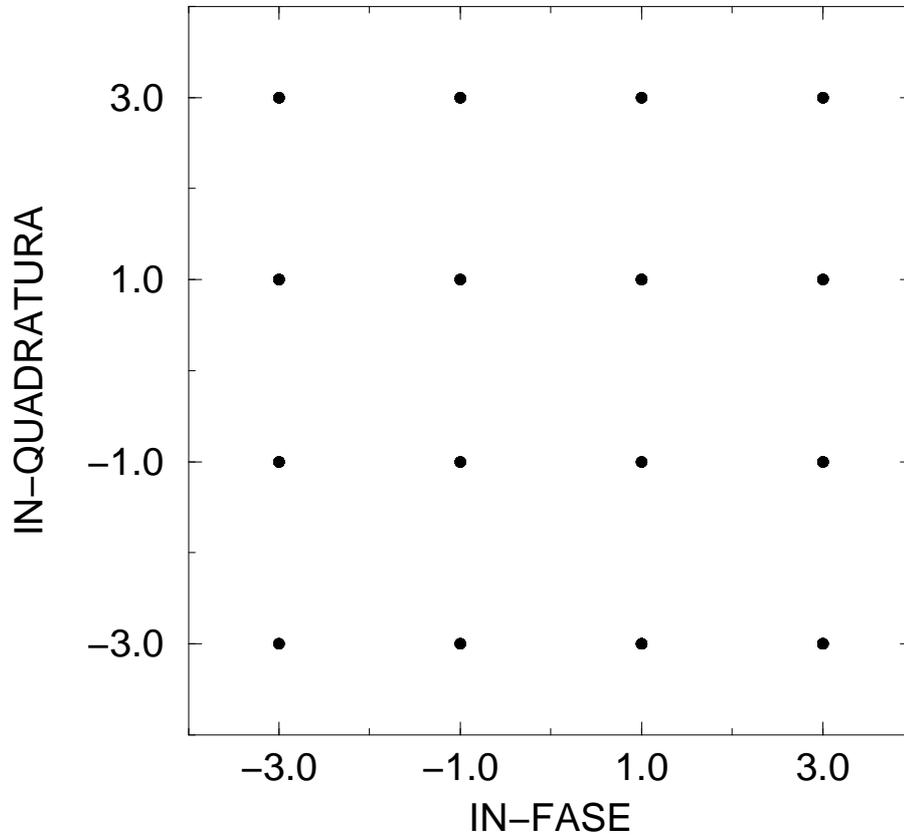


Figura 5.2: Diagramma di dispersione prodotto dal modulatore 16-QAM

ad un degrado delle prestazioni, rendendo impossibile una valutazione corretta delle potenzialità del ricevitore ottimo con sovracampionamento sotto esame.

### 5.1.1 Filtro di trasmissione

Il filtro di trasmissione utilizzato, di risposta impulsiva  $p(t)$  e funzione di trasferimento  $P(f)$ , è un filtro a coseno rialzato con roll-off  $\rho=0,7$ , avente guadagno tale da consentire un corretto utilizzo della NL sfruttandone tutta la dinamica

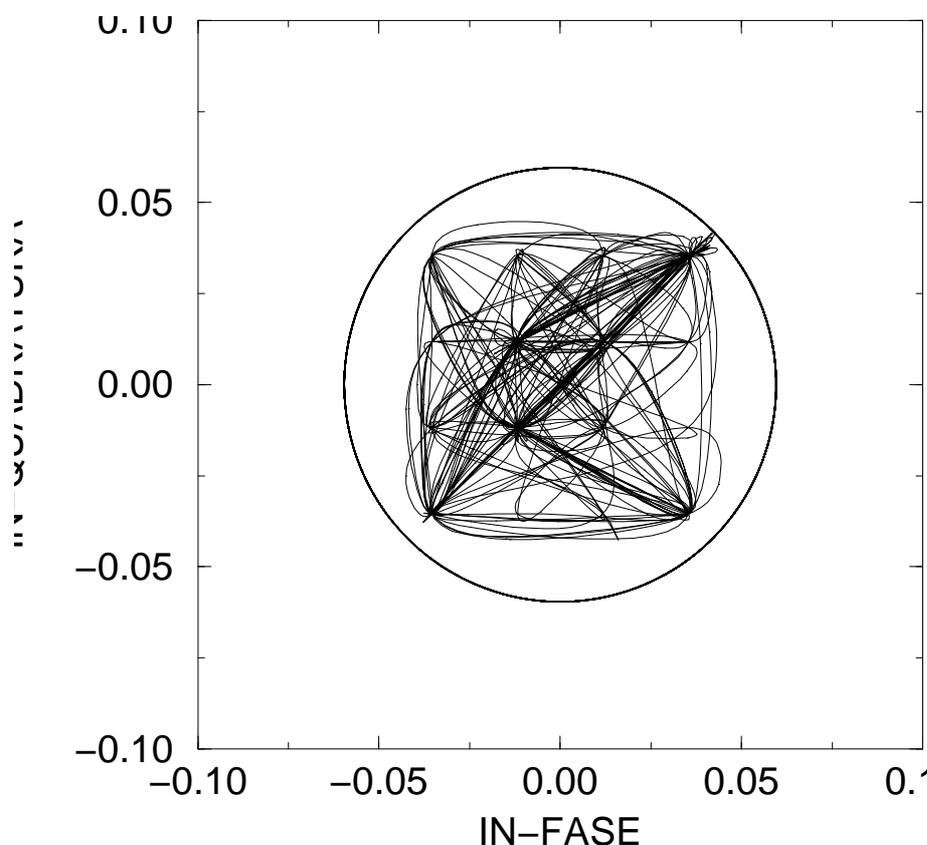


Figura 5.3: Diagramma di dispersione continuo all'ingresso della NL e cerchio di raggio pari al modulo del segnale in ingresso necessario per fare lavorare la NL in saturazione

di ingresso. L'espressione di  $P(f)$  in banda base è la seguente:

$$P(f) = \begin{cases} A & |f| < \frac{1}{2T}(1 - \rho) \\ A \cos^2\left(\frac{\pi}{4\rho}(2|f|T - 1 + \rho)\right) & \frac{1}{2T}(1 - \rho) < |f| < \frac{1}{2T}(1 + \rho) \\ 0 & |f| > \frac{1}{2T}(1 + \rho) \end{cases} \quad (5.1)$$

dove  $T$  rappresenta l'intervallo di simbolo, che viene posto nella simulazione pari a 1 per normalizzazione. Il valore del guadagno  $A$  è calcolabile facilmente per via analitica in assenza di ISI, mentre risulta più complicato determinarlo analiticamente quando si presenta tale fenomeno. Per questo motivo è stato

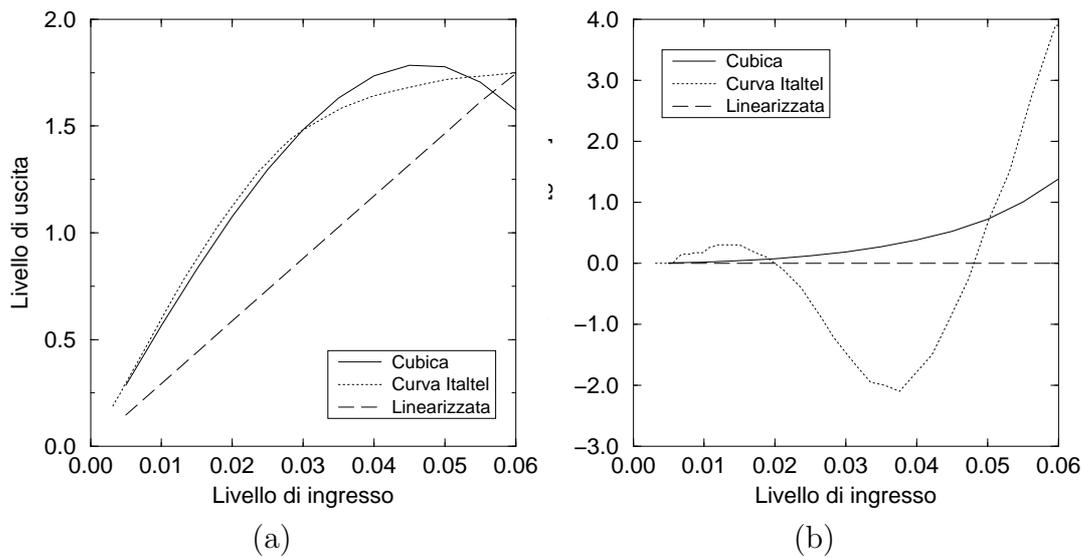


Figura 5.4: Curva AM/AM (a) e AM/PM (b) della NL Italtel, della sua approssimazione al terzo ordine e della sua linearizzazione

valutato per via sperimentale utilizzando il diagramma di dispersione continuo, ossia un diagramma di dispersione in cui viene riportato l'andamento delle componenti in fase ed in quadratura dell'involuppo complesso del segnale in ingresso alla non linearità, non solo in corrispondenza della massima apertura del diagramma ad occhio, ma rappresentando tutti i campioni del segnale impiegati nella simulazione; in questo modo è possibile tenere in considerazione l'effetto dell'ISI e quindi scegliere un guadagno tale che il diagramma di dispersione continuo all'ingresso della NL sia contenuto entro un cerchio di raggio pari al valore del modulo del segnale che porta al desiderato livello di saturazione la NL utilizzata. Con il valore scelto per tale guadagno si ottiene la situazione riportata nella figura 5.3 in cui il cerchio ha un raggio pari a 0,0596 che è il valore necessario per portare in saturazione l'amplificatore a semiconduttore considerato.

### 5.1.2 Non linearità

La prima non linearità utilizzata nel sistema di figura 5.1, è una approssimazione al terzo ordine delle curve AM/AM ed AM/PM relative all'amplificatore a semiconduttore utilizzato dalla Italtel S.p.A.. Tale approssimazione è stata utilizzata inizialmente al posto della NL vera, in quanto consente di disporre di un'espressione analitica delle curve suddette che permette al ricevitore ottimo con sovracampionamento di calcolare le metriche in modo rapido ed efficiente. Da questo sistema si può passare a quello che impiega la NL della Italtel S.p.A. in modo concettualmente semplice, aumentando l'ordine dell'approssimazione utilizzata, anche se ciò comporta un appesantimento notevole delle operazioni svolte dal programma di simulazione. L'approssimazione utilizzata è tale da minimizzare l'errore quadratico medio fra la curva vera e quella approssimata (vedi capitolo 1. Nella figura 5.4 sono riportate a linea continua le curve AM/AM ed AM/PM cubiche, a linea punteggiata le curve relative all'amplificatore della Italtel S.p.A. e a linea tratteggiata le curve relative alla NL linearizzata tramite predistorsore.

### 5.1.3 Ricevitore

Il tipo di ricevitore utilizzato è quello ottimo con sovracampionamento, formato dalla cascata di un filtro di ricezione  $r(t)$  con risposta in frequenza  $R(f)$  costante sulla banda del segnale osservato al suo ingresso e tale che  $|R(f)|^2$  soddisfi il primo criterio di Nyquist, così come specificato nel § 2.3, di un campionario operante a frequenza multipla di quella di segnalazione e di un processore di Viterbi che impieghi opportune metriche di ramo. Il filtro di ricezione  $r(t)$  è stato scelto come un filtro passabanda ideale di banda  $\frac{2}{T}$ , che consente di recuperare tutta l'informazione contenuta nel segnale in uscita dal filtro di canale (anch'esso di banda  $\frac{2}{T}$ ), limitando la potenza del rumore additivo gaussiano bianco (complesso) di densità spettrale  $N_0$ . Data la banda del filtro di ricezione pari a  $\frac{2}{T}$ , il campionario deve estrarre 2 campioni per ogni intervallo di simbolo

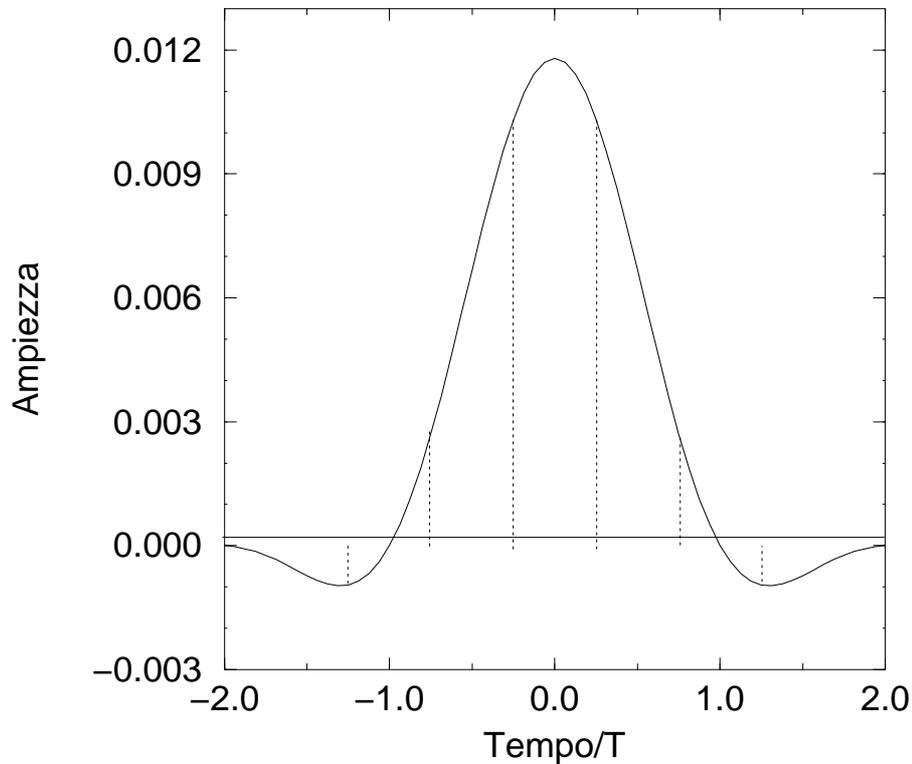


Figura 5.5: Risposta all'impulso  $f(t)$  del sistema senza NL

per potere ricostruire correttamente il segnale a valle del filtro  $r(t)$ . L'intero sistema viene simulato utilizzando 16 campioni per ogni intervallo di simbolo, per cui il campionatore viene realizzato mediante una decimazione di un fattore 8, fornendo al processore di Viterbi solo 2 campioni per ogni simbolo e scartando tutti gli altri.

Nella (3.25) è riportata l'espressione dei campioni osservabili senza rumore da utilizzare al ricevitore per il calcolo delle metriche di ramo. Per non aumentare troppo la complessità del processore di Viterbi, si è deciso di considerare trascurabili, cioè assimilabili al valore nullo, i campioni della risposta impulsiva complessiva del canale  $f_{n\sigma+\eta}^{(\sigma)}$  che abbiano modulo inferiore al 5,5% del

massimo modulo di tali campioni; nella figura 5.5 è riportato l'andamento della risposta impulsiva complessiva derivante dalla cascata dei filtri  $p(t)$ ,  $h(t)$  e  $r(t)$ , denominata  $f(t)$ , e vi sono indicati anche i 6 campioni che vengono considerati dal ricevitore diversi da zero e quindi utilizzati. Questo significa che, essendo  $\sigma = 2$ , i simboli da considerare ad ogni passo per il calcolo delle metriche sono 3, ossia quello attuale più due precedenti che vengono tenuti in considerazione nella definizione degli stati del diagramma trellis; quindi, essendo il numero  $M$  di simboli dell'alfabeto pari a 16 (modulatore 16-QAM) e la lunghezza di dispersione  $L$  del canale pari a 2, il numero di stati necessari per il processore di Viterbi è  $M^L = 256$ .

La dipendenza del numero di stati del ricevitore di Viterbi dalla lunghezza di dispersione  $L$  del sistema è, come noto, di tipo esponenziale e ciò giustifica la scelta effettuata di tenere il canale e l'impulso di trasmissione con una banda relativamente larga, per consentire di mantenere sufficientemente limitato il valore di  $L$ . Già per  $L = 3$  il numero di stati necessario sarebbe uguale a 4096 che rappresenta una complessità troppo elevata, tale da rendere di fatto troppo oneroso l'utilizzo di un processore di Viterbi a complessità piena. Per trattare sistemi con  $L$  e/o  $M$  più elevati, occorre far ricorso a tecniche opportune per ridurre il numero di stati del processore di Viterbi. Questa sarà la strada da seguire nel caso in cui si vogliano prendere in considerazione sistemi con bande più strette (incremento della lunghezza di dispersione del canale) e modulatori con costellazioni più dense (incremento di  $M$ ).

## 5.2 Risultati ottenuti

Verranno di seguito presentati e commentati i risultati ottenuti nelle varie simulazioni effettuate. Come già accennato, si considererà da principio un trasmettitore con non linearità di tipo cubico; il ricevitore a stima di sequenza impiegato sarà effettivamente il ricevitore ottimo per il canale considerato. In un successivo paragrafo verrà invece impiegata al trasmettitore la non linearità descritta

come NL Italtel e il ricevitore, progettato sulla base di una approssimazione al terzo ordine della non linearità impiegata, risulterà di fatto subottimo. In entrambi i casi, le prestazioni ottenute si confronteranno con quelle ottenibili da un sistema in cui il dispositivo non lineare sia perfettamente predistorto, a parità di potenza di picco, e il ricevitore impiegato sia un ricevitore ottimo a stima di sequenza per canale lineare. Alcune considerazioni, che estendono l'approccio alla valutazione analitica di prestazioni per sistemi non lineari già introdotto nel capitolo 3, verranno aggiunte in un ulteriore paragrafo, riferendosi al solo caso di non linearità cubica in quanto la valutazione analitica di prestazioni qui affrontata richiede un ricevitore ottimo per il canale considerato.

In un ulteriore paragrafo si prenderà in considerazione un altro genere di approccio al problema delle non linearità, introducendo un fattore di back-off in ingresso variabile sulla non linearità Italtel e considerando come ricevitori alternativamente il ricevitore con sovracampionamento ottimo per canale del terzo ordine (ma qui subottimo) o un semplice ricevitore a stima simbolo per simbolo e decisione a soglia, che qui, stanti le scelte di sistema, risulterebbe ottimo se il dispositivo di amplificazione fosse lineare o perfettamente predistorto.

### 5.2.1 Risultati per sistema con NL cubica

Nella figura 5.6, sono riportati i risultati delle simulazioni relative al sistema di figura 5.1, in cui come blocco NL è stato impiegato un dispositivo con caratteristiche AM/AM e AM/PM rappresentanti un'approssimazione al terzo ordine di quelle dell'amplificatore a semiconduttore utilizzato dalla Italtel. Le curve tracciano l'andamento della probabilità di errore sul simbolo ottenuta al variare del rumore; in ascissa si riporta l'inverso della densità spettrale di potenza monolaterale del rumore, descrivibile come processo complesso gaussiano bianco. Il fattore di energia media per simbolo trasmesso ( $E_s$ ) che di solito si impiega in ascissa per tali curve è qui omissso in quanto il confronto che ci si propone di operare prevede la stessa potenza di picco trasmessa per i vari sistemi in

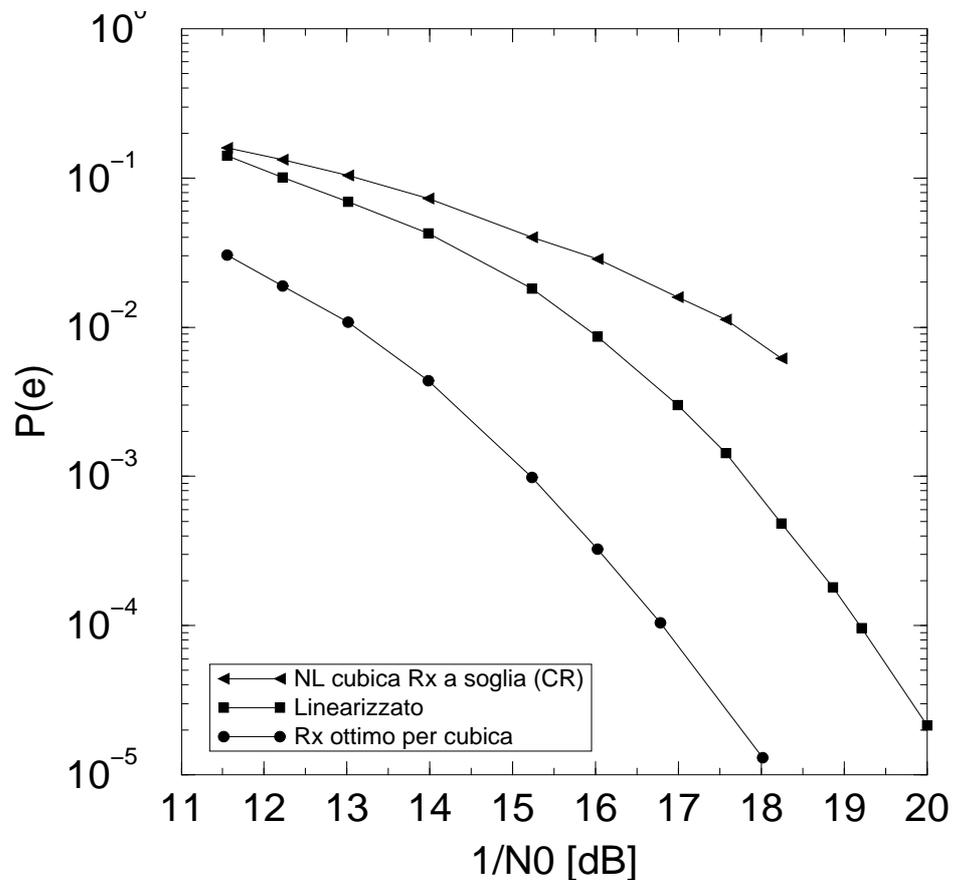


Figura 5.6: Probabilità d'errore per sistema con NL cubica

esame e non la stessa potenza media. Si potrebbe alternativamente impiegare in ascissa la grandezza  $\frac{C}{N}$ , rapporto tra la potenza di media della portante (sinusoidale), quindi proporzionale a quella di picco, trasmessa e la potenza di rumore: l'andamento delle curve sarebbe il medesimo di figura 5.6 salvo un fattore di scala costante in ascissa. Manterremo la convenzione di tracciare le curve di probabilità d'errore in funzione di  $\frac{1}{N_0}$ , ove non specificato diversamente.

Con riferimento alla figura 5.6, la curva contrassegnata da quadratini rappresenta la probabilità di errore sul simbolo ottenibile, dal sistema di figura

5.1, nel caso in cui venga adottata la tecnica di linearizzazione del dispositivo non lineare a parità di potenza di picco ottenibile all'uscita dall'amplificatore stesso. In questo caso è stato utilizzato un ricevitore con fattore di sovracampionamento  $\sigma = 2$ , nonostante si lavori in regime lineare, con metriche ottenute da quelle valide per il sistema con NL cubica, eliminando il contributo del terzo ordine; questa scelta è stata dettata dal vantaggio di poter sfruttare lo stesso programma di simulazione utilizzato per il caso cubico apportandovi solo lievi modifiche. Questo tipo di ricevitore è comunque un ricevitore ottimo anche nel caso lineare, per cui le prestazioni sono identiche a quelle ottenibili con una qualunque altra architettura di ricevitore ottimo per canale lineare. A conferma di ciò questa curva è stata confrontata con quella riportata nel testo [1], relativa alla modulazione 16-QAM su canale lineare, ottenendo un perfetto accordo fra le due.

La curva contrassegnata da pallini rappresenta la probabilità d'errore sul simbolo relativa al sistema di figura 5.1 in cui si adopera, come blocco NL, il dispositivo approssimante al terzo ordine l'amplificatore della Italtel e, come ricevitore, il ricevitore ottimo con sovracampionamento descritto nel capitolo 2.

La curva contrassegnata da triangolini rappresenta la probabilità di errore sul simbolo nel caso in cui il ricevitore non sia quello ottimo con sovracampionamento, ma sia un ricevitore simbolo per simbolo, ottimo per il caso lineare, utilizzando un solo campione per intervallo di simbolo ed un insieme di soglie con le quali confrontare tale campione per decidere quale simbolo è stato trasmesso. Il valore di tali soglie è stato scelto in maniera sperimentale osservando il diagramma ad occhio del segnale presente dopo il filtro di ricezione. Questa strategia di ricezione vuole rappresentare una situazione in cui si vada ad introdurre distorsione non lineare del terzo ordine in un sistema lineare con ricevitore ottimo realizzato nella maniera più semplice (un campione per intervallo di simbolo e decisore a soglie) ed in cui l'unica contromisura adottata per compensare la distorsione non lineare sia l'aggiustamento ottimale dei valori di soglia del decisore. Questa soluzione, di indubbia "economicità", porta ad

un degrado di prestazioni valutabile comparando la relativa curva con quella relativa al sistema linearizzato con predistorsione della non linearità.

Riassumendo, il significato delle curve riportate nella figura 5.6 è il seguente:

- A. la curva contrassegnata da triangolini rappresenta l'approccio "passivo" con cui si può progettare un ricevitore nel caso di presenza di un dispositivo NL, comportandosi come ci si comporterebbe in assenza di NL ovvero utilizzando in ricezione un decisore a soglie. Non si compie nessuna azione né al trasmettitore, né al ricevitore salvo l'ottimizzazione, in quest'ultimo, delle soglie di decisione. La didascalia CR nella legenda indica l'impiego di un filtro di trasmissione a coseno rialzato, coerentemente con la scelta operata per tale filtro nel caso delle altre due curve;
- B. la curva contrassegnata da quadratini rappresenta la curva di riferimento che è ottenibile agendo al trasmettitore, tramite compensazione della NL esistente, ed utilizzando un ricevitore a stima di sequenza (*Maximum Likelihood Sequence Detection*, MLSD) per canale lineare, che è ottimo in quanto lavora in assenza di distorsione non lineare;
- C. la curva contrassegnata da pallini rappresenta il modo migliore di progettare un ricevitore in presenza di NL; tale ricevitore è un ricevitore ottimo per il canale in esame, come già dimostrato.

Come si può notare, il guadagno ottenuto utilizzando il ricevitore ottimo con sovracampionamento, rispetto al caso di predistorsione al trasmettitore, è di circa 2,5 dB; nella realtà tale guadagno potrebbe anche essere maggiore, in quanto la linearizzazione della NL non può avvenire in maniera perfetta (come ipotizzato nella simulazione). Ciò comporta infatti un peggioramento delle prestazioni ottenibili e quindi un aumento del guadagno del ricevitore ottimo del caso C rispetto a quello del caso B. Inoltre è evidente la notevole subottimalità del ricevitore del caso A che ha prestazioni sempre peggiori di quelle degli altri due casi considerati. Le simulazioni vengono arrestate ad un tasso di errore di

circa  $10^{-2}$  in questo caso, in quanto sufficienti ad evidenziare l'inadeguatezza dell'approccio del caso A. Da notare come per alti valori del parametro  $N_0$  le curve del caso A e del caso B si avvicinino, mentre per bassi valori di  $N_0$  si allontanano; questo risultato è ragionevole poiché quando il rumore è considerevole, l'effetto di non ottimalità del ricevitore del caso A risulta meno evidente e nel contempo la maggiore potenza media trasmessa consente di contrastare meglio il rumore. Come già osservato, la maggiore potenza media è dovuta alla scelta di linearizzare la NL a parità di potenza di picco, per cui, mediamente, la potenza fornita in uscita è minore rispetto a quella fornita dalla NL stessa come si può capire osservando la figura 5.4.

### 5.2.2 Limiti alle prestazioni ottenibili con non linearità cubica

In questo paragrafo verrà trattato il problema della determinazione dei limiti inferiore e superiore della probabilità di errore sul simbolo per il ricevitore ottimo con sovracampionamento adattato alla NL cubica. La trattazione che segue riprende ed espande i metodi di valutazione analitica di prestazione già esaminati nel capitolo 3, di cui si daranno brevi richiami.

Essendo stato dimostrato che il ricevitore con sovracampionamento è ottimo, nel senso che minimizza la probabilità d'errore sulla sequenza, nell'ipotesi che il campionamento venga effettuato alla frequenza di Nyquist, le prestazioni da esso ottenibili sono uguali a quelle ottenibili da un qualsiasi altro ricevitore ottimo. In [1] è indicato come determinare i bounds sulle prestazioni dei ricevitori ottimi. Tali bounds possono essere espressi in funzione di quella che viene chiamata distanza fra sequenze. Indicando con  $\mathbf{a}$  una sequenza di simboli trasmessi di lunghezza  $N$  e con  $z'(t, \mathbf{a})$  il segnale osservabile al ricevitore quando si trasmetta la sequenza  $\mathbf{a}$  in assenza di rumore, si definisce distanza fra due sequenze  $\mathbf{a}$  ed  $\mathbf{a}'$  la quantità  $d(\mathbf{a}, \mathbf{a}')$ , calcolabile sia tramite il segnale tempo-continuo che quello

tempo-discreto con fattore di sovracampionamento  $\sigma$ , ottenibile dall'espressione

$$d^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = \int_{T_0} |z'(t, \mathbf{a}) - z'(t, \mathbf{a}')|^2 dt = \frac{T}{\sigma} \sum_{k=1}^N \sum_{\eta=0}^{(\sigma-1)} |z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a}) - z'_{k\sigma+\eta}(\mathbf{a}')|^2 \quad (5.2)$$

dove  $T_0$  è la durata della trasmissione. In presenza di rumore additivo gaussiano bianco avente densità spettrale del segnale analitico ad esso associato pari a  $N_0$ , la probabilità che un ricevitore ottimo scelga la sequenza  $\hat{\mathbf{a}}$  al posto della sequenza trasmessa  $\mathbf{a}$  è maggiorabile dalla probabilità d'errore a coppie [1] che ha l'espressione (3.17) e che qui richiamiamo

$$P(\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}) \leq Q\left(\frac{d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{\sqrt{2N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})}{2\sqrt{N_0}}\right). \quad (5.3)$$

Il massimo di tale probabilità di errore a coppie si ha per quelle coppie di sequenze per le quali la distanza è quella minima possibile, indicata con  $d_{min}$ . La distanza minima è un parametro importante nella determinazione dei limiti delle prestazioni ottenibili da questo tipo di sistema. Infatti, un limite inferiore alla probabilità di errore sulla sequenza si può ottenere supponendo di commettere solamente errori fra sequenze aventi distanza pari a  $d_{min}$ ; l'espressione del limite inferiore si può scrivere come

$$P_{inf}(e) = \frac{2N(d_{min})}{N_t} Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (5.4)$$

con  $N(d_{min})$  numero di coppie a distanza  $d_{min}$  e  $N_t$  numero totale di sequenze lunghe quanto l'evento errore che definisce  $d_{min}$ . L'ultima espressione rappresenta un modo alternativo di esprimere la (3.24), già derivata come approssimazione della probabilità di evento errore

Un bound superiore alla probabilità di errore, noto come union bound, può essere determinato mediando la probabilità di scegliere una sequenza  $\mathbf{a}_i$  sbagliata quando si trasmette una sequenza  $\mathbf{a}_j$  al variare di tutte le possibili sequenze  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{a}_j$ . Supponendo che il numero totale di possibili sequenze lunghe quanto l'evento errore considerato sia  $N_{tot}$  il limite superiore si può ottenere con la

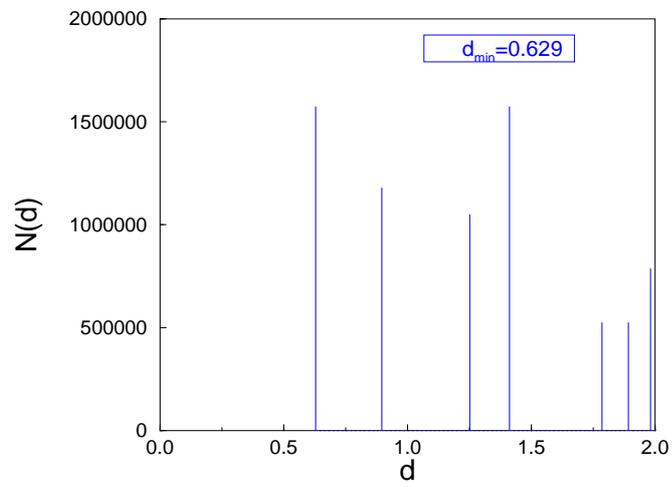
seguinte formula

$$P_{sup}(e) = \frac{1}{N_{tot}} \sum_{i=1}^{N_{tot}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{tot}} Q \left( \frac{d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)}{\sqrt{2N_0}} \right). \quad (5.5)$$

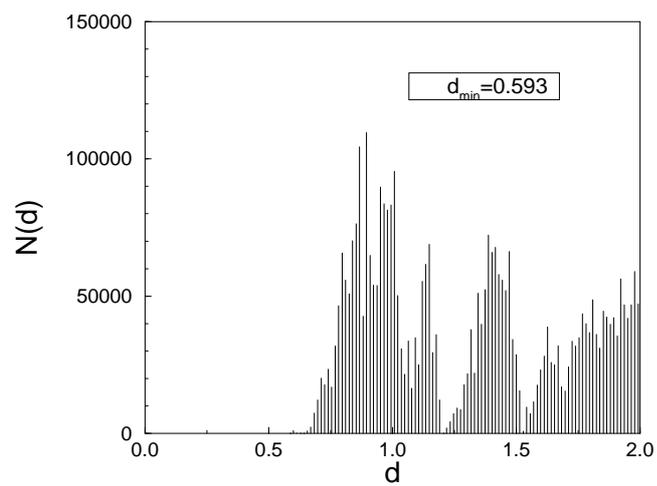
Per applicare le espressioni dei bounds al sistema con NL cubica sarebbe necessario determinare le distanze fra tutte le possibili coppie di sequenze e la distanza minima. È stato sviluppato un programma di calcolo che, sfruttando l'algoritmo di Saxena, descritto in [1, 23] consente di determinare la distanza minima e anche tutte le coppie di sequenze che distano fra loro  $d_{min}$ , lavorando sul diagramma trellis impiegato dal ricevitore. In particolare, per il sistema non lineare simulato, si è ottenuto che l'evento errore, individuato sul trellis da due percorsi che si diramano in un punto per poi riunirsi dopo un certo numero di passi, avente distanza minima ha una lunghezza sul trellis pari a 3 transizioni e corrisponde, essendo la lunghezza di dispersione  $L$  del canale pari a 2, ad un solo simbolo stimato in modo errato. Tale simbolo, transitando nella memoria contenuta negli stati del processore di Viterbi, dà luogo ad una diramazione dal percorso corretto che coinvolge due stati errati.

È possibile verificare, nel caso in esame, che gli eventi errore a lunghezza maggiore di 3 producono delle distanze talmente maggiori della  $d_{min}$  che nel calcolo del limite superiore possono essere trascurati, grazie all'andamento rapidamente decrescente della funzione  $Q(\cdot)$  presente nella (5.5). Il programma di calcolo applicato sia al caso con NL cubica che a quello linearizzato ha fornito due parametri  $d_{min}$  di valore, rispettivamente, 0,5928635 e 0,629116.

La figura 5.7 mostra appunto la distribuzione del numero di coppie a distanza  $d$  in funzione di  $d$  per i due tipi di canale considerati: chiameremo questo genere di grafici *spettri delle distanze*. È significativa la grande spaziatura tra le prime due righe dello spettro nel caso di canale linearizzato, di conseguenza la curva della simulazione ha un andamento del tipo a funzione  $Q$  con parametro  $d_{min}$  come ci si aspetta dall'espressione (5.4). Come detto, le distanze fra coppie di sequenze sono in numero molto piccolo poiché nel caso lineare la distanza



(a)



(b)

Figura 5.7: Spettro delle distanze nel caso di sistema linearizzato (a) e con non linearità cubica (b)

dipende solo dalla sequenza errore, cioè dalla differenza tra le 2 sequenze  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{a}_j$  e non dalle sequenze stesse e quindi il numero di possibili distanze è pari al numero di possibili sequenze errore. In altre parole, se si indica con  $\mathbf{a}$  una possibile sequenza e con  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  la sequenza originata da  $\mathbf{a}$  tramite l'errore  $\mathbf{e}$  tali che  $d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  sia pari al valore  $d_0$ , allora ogni possibile coppia di sequenze ottenuta sommando  $\mathbf{e}$  ad una sequenza  $\mathbf{c}$  ha la stessa distanza  $d_0$  qualunque sia  $\mathbf{c}$ .

Un ulteriore programma è stato realizzato al fine di calcolare, a partire dal valore della distanza minima e della lunghezza  $L_{err}$  dell'evento errore a distanza minima, il numero  $N(d)$  di coppie di sequenze distanti fra loro  $d$  al variare di  $d$ , limitatamente ad eventi errore di lunghezza  $L_{err}$ . L'espressione (5.5) può essere riscritta in funzione di  $N(d)$  e  $d$  nel seguente modo

$$P_{sup}(e) \simeq \frac{1}{N_{tot}} \sum_{d=d_{min}}^{d_{max}} 2N(d) \cdot Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (5.6)$$

in cui il segno di uguale circa è dovuto al troncamento della sommatoria sulla distanza a valori inferiori ad un certo massimo  $d_{max}$ , oltre il quale si assume che il contributo dei relativi addendi sia trascurabile, ed alla assunzione di limitare gli eventi errore a quelli di lunghezza  $L_{err}$ . La precedente espressione può essere ulteriormente approssimata supponendo di dividere l'intervallo compreso fra i valori  $d_{min}$  e  $d_{max}$  in  $I$  punti  $d_n$  equispaziati, ottenendo così

$$P_{sup}(e) \simeq \frac{1}{N_{tot}} \sum_{n=1}^I 2N(d_n) \cdot Q\left(\frac{d_n}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (5.7)$$

dove il fattore 2 deriva dalla doppia sommatoria presente nell'espressione (5.5). Nel grafico di figura 5.8 sono riportati i bound inferiore e superiore calcolati tramite le formule (5.4) e (5.7) utilizzando le distanze fornite dai precedenti programmi di calcolo; i numeri presenti nella legenda rappresentano il valore di distanza massima  $d_{max}$  utilizzata nel calcolo degli union-bound.

Per quanto riguarda il caso lineare, le curve dei due limiti praticamente coincidono fra loro e con la curva sperimentale (etichettata "linearizzato") per

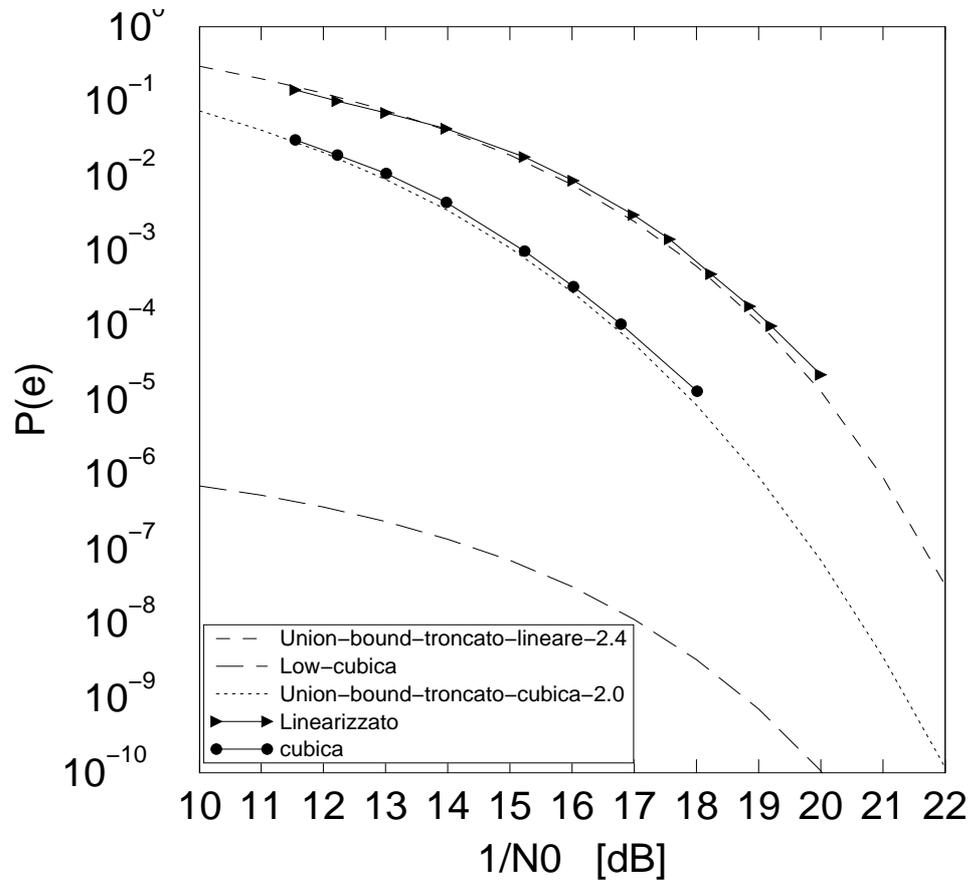


Figura 5.8: Bounds sulla probabilità di errore per sistema con non linearità cubica

cui è stato riportato solo il bound superiore. Questo è un fatto ragionevole in quanto i possibili eventi errore hanno distanze concentrate attorno ad un numero discreto di valori molto separati fra loro; inoltre il numero di eventi errore che hanno distanze superiori a quella minima sono troppo pochi, in relazione alla distanza, per poter dare, nella sommatoria della (5.7) un contributo ragionevole al limite superiore.

Nel caso di non linearità cubica, invece, le cose vanno assai diversamente. Come si può notare dalla figura 5.8 il limite inferiore calcolato tramite la (5.4)

si trova molto più in basso rispetto alla curva simulata ed inoltre non è ad essa parallelo, il che vuol dire che non è l'errore a distanza minima quello che si verifica prevalentemente, come ci si potrebbe erroneamente attendere. Il perché si verifichi questo fatto si può capire osservando la figura 5.7 relativamente allo spettro delle distanze nel caso cubico. Tale figura, come detto, riporta il numero di coppie di percorsi sul trellis di lunghezza 3 aventi una distanza  $d$  compresa tra la  $d_{min}$  e una distanza massima considerata. La grande differenza rispetto al caso lineare è che vi sono moltissime distanze possibili e che a queste corrispondono un numero di coppie di percorsi sul trellis che è rilevante. Questo implica che nel calcolo del limite superiore tramite l'espressione (5.7) i contributi forniti dalle coppie di sequenze con distanza diversa da  $d_{min}$  non sono trascurabili sia perché ve ne sono molti, sia perché vi sono delle distanze possibili molto vicine a quella minima e con molteplicità  $N(d)$  tale da fornire un contributo molto prossimo o addirittura dominante rispetto a quello relativo alla distanza minima. L'aumento delle possibili distanze è dovuto al fatto che, contrariamente al caso lineare, la distanza non dipende solo dall'errore ma anche dalla sequenza alla quale l'errore viene applicato; ciò a causa dell'effetto della NL. In altre parole, se la distanza fra la coppia  $\mathbf{a}$  e  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{e}$  è pari a  $d_0$ , la distanza fra  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{c} + \mathbf{e}$  in generale è diversa da  $d_0$  per cui il numero delle possibili distanze aumenta notevolmente. È interessante notare come questo fenomeno di *dipersione* dello spettro delle distanze sia graficamente simile all'effetto di dispersione che la costellazione di simboli osservati al ricevitore subisce per effetto della non linearità.

Calcolando il limite superiore considerando i vari addendi nella (5.7) si ottiene un ottimo accordo con le curve sperimentali, come si può constatare dalla figura 5.8. Le curve simulate risultano leggermente al di sopra dello union bound per due motivi: in parte poiché questo è troncato e non si considerano tutte quante le possibili distanze, in parte poiché la valutazione dei bound è fatta assumendo un canale con risposta temporale strettamente limitata nel tempo, cosa che non accade nel sistema simulato in quanto i filtri impiegati sono a

banda strettamente limitata ed è quindi sempre presente una piccola dose di interferenza intersimbolica residua non tenuta in conto dal ricevitore MLSD che risulta quindi, sotto questo punto di vista, non ottimo in senso rigoroso.

Come si può vedere, per valori di  $N_0$  molto bassi i due bound superiore ed inferiore si avvicinano e tendono a coincidere perché tende a prevalere il solo effetto degli errori a distanza minima; inoltre, siccome la distanza minima ottenuta nel caso linearizzato è maggiore di quella ottenuta nel caso di NL cubica, per rumore molto basso le prestazioni del sistema linearizzato diventano migliori di quelle del ricevitore ottimo con sovracampionamento su canale non lineare, però ciò si verifica solo per valori di probabilità di errore inferiori a  $10^{-46}$  che sono privi di interesse pratico.

### 5.2.3 Risultati per sistema con NL Italtel

Nella figura 5.9 sono riportati i risultati delle simulazioni relative al sistema di figura 5.1 in cui il blocco NL è costituito dall'amplificatore a semiconduttore utilizzato dalla Italtel.

Le tre curve presenti in tale figura sono analoghe a quelle presenti nella figura 5.6, con una differenza fondamentale per ciò che riguarda la curva contrassegnata dai pallini. Infatti, nel caso precedente, il ricevitore utilizzato per ottenere la corrispondente curva è stato quello ottimo per la non linearità cubica, in cui i valori dei campioni  $z'_{n\sigma+\eta}$  che il ricevitore impiega per il calcolo delle metriche sono quelli corretti, a meno dei contributi trascurati a seguito del troncamento della risposta impulsiva (riduzione della lunghezza di dispersione) necessario per non incrementare troppo il numero di stati del processore di Viterbi. Nel caso in considerazione, cioè con NL Italtel, è presente un effetto di non ottimalità, dovuto al fatto che il ricevitore utilizzato è lo stesso adoperato nel caso precedente in cui era presente l'approssimazione cubica della NL. Questo significa che il processore di Viterbi utilizza, per il calcolo delle varie metriche, dei campioni  $z'_{n\sigma+\eta}$  che non sono quelli reali, ma solo una loro approssimazione al terzo

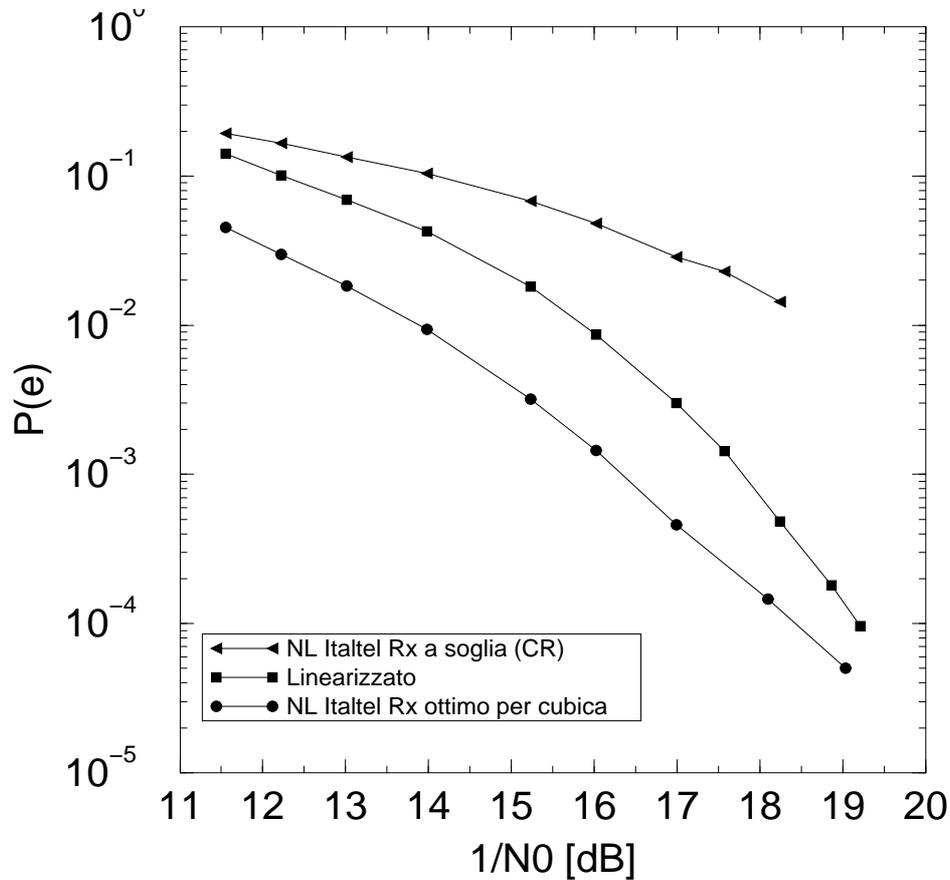


Figura 5.9: Probabilità d'errore per sistema con NL Italtel e ricevitore ottimo per canale cubico

ordine, mentre per approssimare bene la NL vera occorre utilizzare polinomi almeno del quinto-settimo ordine.

Dal punto di vista realizzativo, il programma di simulazione è stato migliorato in modo che sia consentito caricare direttamente da file il valore degli  $z'_{n\sigma+\eta}$  invece che calcolarli di volta in volta durante la simulazione; con tale modifica è possibile utilizzare un'approssimazione di ordine superiore per la NL senza per questo incrementare la complessità e la durata delle simulazioni ma semplicemente appesantendo la procedura di calcolo preliminare dei campioni  $z'_{n\sigma+\eta}$ .

Il fatto di avere comunque mantenuto l'approssimazione al terzo ordine è stato dettato dalla difficoltà di sviluppare in tempi rapidi un programma che consenta tale calcolo preliminare dei parametri  $z'_{n\sigma+\eta}$  con approssimazione di grado più elevato.

L'effetto dell'approssimazione cubica è quello di introdurre un certo grado di non ottimalità al ricevitore che si traduce in un guadagno rispetto alla curva contrassegnata da quadratini (caso linearizzato) di circa 1,5 dB a tassi di errore di  $10^{-3}$  perdendo quindi circa 1 dB rispetto al caso del paragrafo precedente. Tale guadagno va riducendosi sempre più al diminuire della potenza del rumore ed addirittura sembra prima annullarsi per poi diventare negativo (ossia prestazioni inferiori rispetto al caso linearizzato) a tassi di errore che, estrapolando le curve ottenute, sembrano essere nell'ordine di  $10^{-5}$ . Comunque è importante ricordare che la perdita rispetto alla curva ottenuta con ricevitore ottimo cubico e NL cubica (figura 5.6) dovrebbe essere compensata aumentando l'ordine della approssimazione utilizzata nel calcolo degli  $z'_{n\sigma+\eta}$  impiegati per ottenere le metriche di percorso.

#### 5.2.4 Risultati per sistema con NL Italtel in presenza di un fattore di back-off

In questo paragrafo vengono trattati i risultati ottenuti relativamente al sistema di figura 5.1, in cui il dispositivo NL utilizzato è l'amplificatore della Italtel, il ricevitore è quello ottimo (per la cubica) con sovracampionamento ed in cui è presente un attenuatore all'ingresso della NL, che consenta di far lavorare il dispositivo in zona più lineare, ossia meno distorcente. Nella figura 5.10 sono riportate varie curve di prestazione, in termini di probabilità di errore sul simbolo, al variare del fattore di back-off; tale fattore esprime il valore dell'attenuazione  $A$  (in dB), che viene applicata al segnale in ingresso alla NL, secondo l'espressione  $A_{dB} = 20 \log_{10} A$ .

All'aumentare del fattore di back-off si verificano due fenomeni i cui effetti

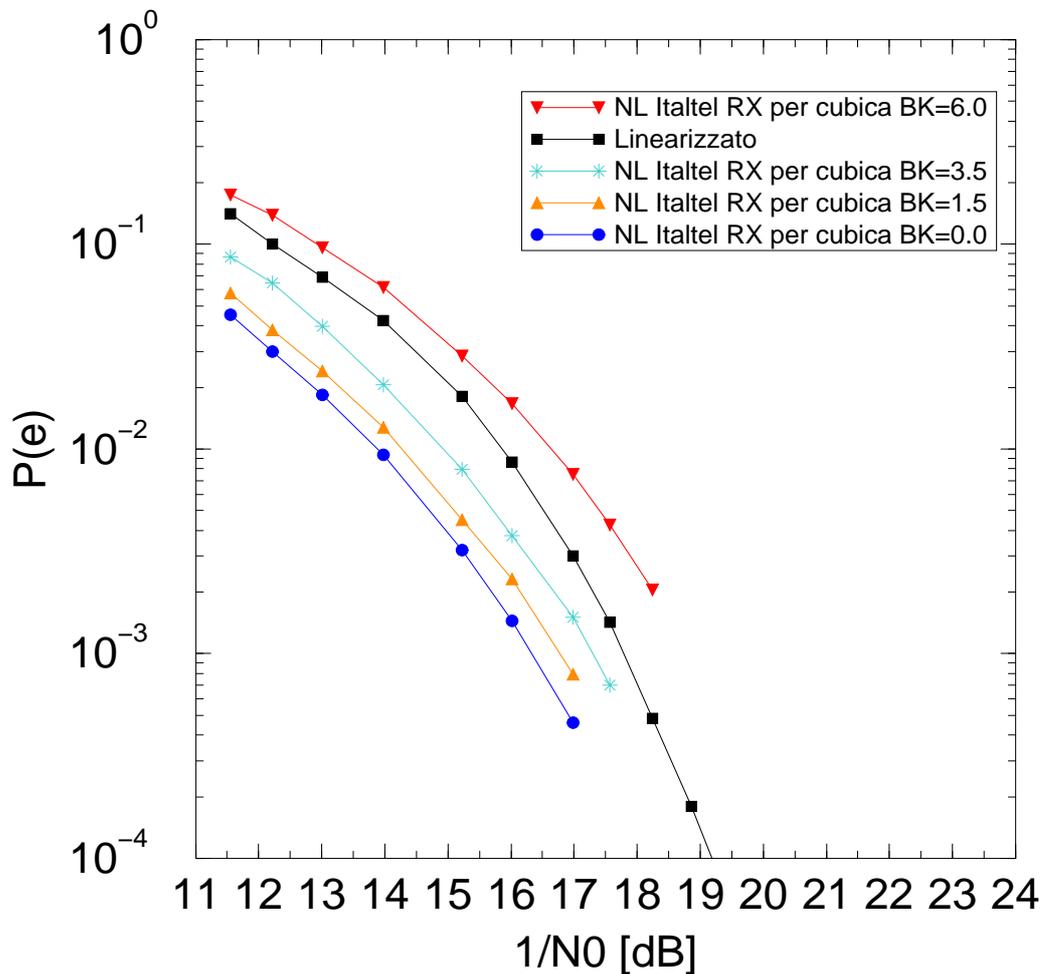


Figura 5.10: Probabilità d'errore per sistema con NL Italtel e ricevitore ottimo per cubica al variare del fattore di back-off

sono contrastanti fra loro. Da un lato utilizzando l'amplificatore in zona più lineare l'approssimazione cubica diviene sempre più prossima alla situazione reale (vedere figura 5.4) e quindi il ricevitore diviene "sempre più ottimo": tale effetto tende a far migliorare le prestazioni del sistema. Dall'altro lato, aumentando il fattore di back-off, si sfruttano sempre meno le potenzialità dell'amplificatore ed

in particolare diminuiscono la potenza di picco e quella media, il che, a parità di potenza di rumore in ricezione, tende a far peggiorare le prestazioni ottenibili. Dalle curve riportate in figura 5.10, si può notare come, ai livelli di rumore considerati, le prestazioni del ricevitore peggiorino sempre all'aumentare del fattore di back-off, il che indica come il secondo effetto sia dominante rispetto al primo; per potenze di rumore più basse il comportamento potrebbe essere diverso in quanto dovrebbe aumentare l'importanza del fattore "ottimalità" del ricevitore rispetto a quello di potenza media trasmessa. Dal punto di vista simulativo risulta essere troppo oneroso scendere al di sotto di tassi di errore dell'ordine di  $10^{-4}$ , in quanto il numero di simboli richiesti, per avere risultati attendibili, sarebbe troppo alto e richiederebbe simulazioni di durata inaccettabile.

Diverso è il comportamento nel caso in cui il ricevitore sia il banale ricevitore a soglie, con soglie ottimizzate. I risultati delle simulazioni al variare del back-off sono riportati nella figura 5.11. Per alti valori di potenza del rumore l'effetto di alta potenza media trasmessa fa sentire i propri benefici, per cui la prestazione migliore, anche se di poco, si ottiene per fattore di back-off nullo. Al diminuire di  $N_0$ , l'effetto di aumento dell'ottimalità del ricevitore prevale rapidamente sulla diminuzione di potenza media trasmessa, il che rende le prestazioni del sistema con back-off nullo peggiori sia del caso con back-off di 3.5 dB, sia di quello con back-off di 6 dB. La tendenza mostrata dalle curve dell'ultimo caso, lascia intuire come la scelta di un back-off pari a 6 dB (NL impiegata in regime pressoché lineare) sia vincente a tassi di errore inferiori a circa  $10^{-5}$  e ciò è dovuto al fatto che il ricevitore impiegato è un ricevitore ottimo nel caso lineare ma altamente sub-ottimo nel caso non lineare.

Il confronto delle figure 5.10 e 5.11 evidenzia tuttavia come l'uso del ricevitore MLSD con sovracampionamento proposto consenta, sia pure in una situazione di sub-ottimalità, di sfruttare appieno la potenza disponibile dell'amplificatore e di raggiungere i medesimi tassi di errore in condizioni di rumore molto più sfavorevoli rispetto ad un convenzionale ricevitore, laddove si sia ottimizzato il fattore di back-off della non linearità.

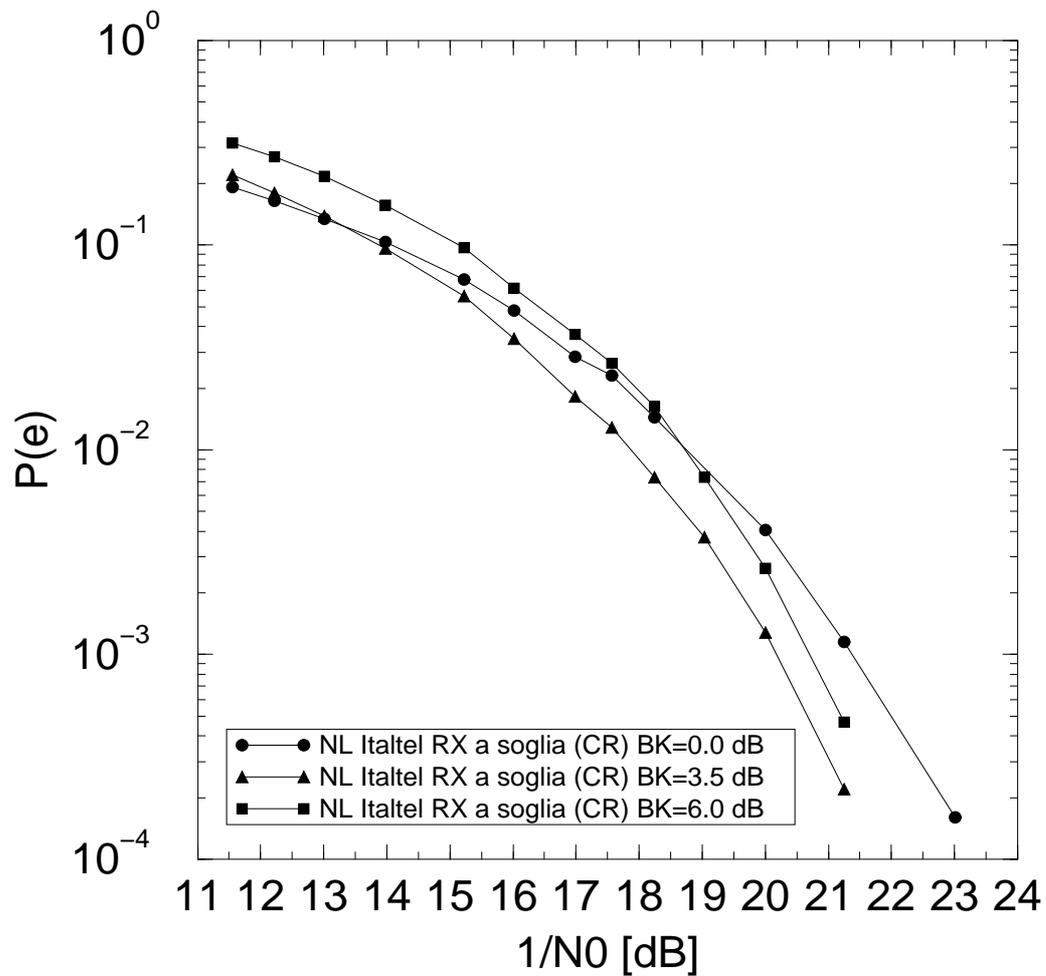


Figura 5.11: Probabilità d'errore per sistema con NL Italtel e ricevitore ottimo per canale lineare al variare del fattore di back-off

# Conclusioni

Nella presente tesi si sono affrontati alcuni temi di interesse per i sistemi di trasmissione numerica su canali affetti da distorsioni non lineari. Cercheremo, in queste note conclusive, di evidenziare sia i risultati raggiunti che alcuni limiti dell'approccio seguito.

La modellazione del canale non lineare nel suo equivalente in banda base, intrapresa nel capitolo 1, mediante sviluppo polinomiale del dispositivo non lineare in banda passante, rappresenta uno strumento efficace e semplice, già impiegato, ad esempio, in [25], che, pur non presentando particolari limiti di ordine concettuale (lo sviluppo polinomiale può includere un numero arbitrario ma finito di termini), può risultare computazionalmente oneroso laddove si applichi in canali che richiedono uno sviluppo polinomiale della non linearità di ordine elevato. Il principale pregio di tale approccio è quello di separare analiticamente il contributo del primo ordine del canale, che è l'unico presente nei canali lineari, dai contributi di ordine superiore. Ciò consente di operare dei confronti significativi fra i due tipi di canale, lineare e non lineare (si veda il capitolo 3). La separazione analitica dei contributi dei filtri lineari di canale dai parametri del dispositivo non lineare facilita inoltre, in prospettiva, lo sviluppo di algoritmi di adattività del ricevitore sia rispetto al canale tempo variante, sia rispetto alla deriva della caratteristica non lineare dell'amplificatore; quest'ultima risultando di norma tempo-variante con velocità estremamente inferiore rispetto al canale fisico. Se ipotizziamo un canale fisico di Rummler, vi è la possibilità di sfruttare le tecniche introdotte nel §1.3.2, per rendere la struttura del ricevitore

parametrica rispetto al canale, previa stima dei parametri che lo caratterizzano.

La derivazione del ricevitore ottimo con sovracampionamento, e della sua versione subottima con campionamento ad intervallo di simbolo (capitolo 2), entrambi oggetti di brevetto [26, 27], rappresenta un risultato originale che consente di superare la necessità di un gran numero di filtri adattati nella sezione front-end del ricevitore ottimo; questo problema era stato evidenziato in tutti i lavori presenti nella letteratura tecnica relativi al progetto di ricevitori ottimi per canali non lineari. La presenza di un solo filtro di front-end di struttura semplice e indipendente dalle caratteristiche del canale, è una conseguenza della tecnica di sovracampionamento.

La congettura espressa nel capitolo 2 riguardo l'invarianza della lunghezza di dispersione del canale non lineare rispetto al corrispettivo lineare è un risultato notevole che implica la stessa complessità, in termini di numero di stati, per i processori di Viterbi che effettuano la stima di sequenza sui due tipi di canale menzionati. Tale invarianza va intesa valutata sui segnali a tempo continuo che caratterizzano la risposta, del primo ordine e di ordine superiore, del canale; la congettura non vale quindi, ovviamente, per i modelli a tempo discreto di canali ideali, o opportunamente equalizzati, i quali, essendo per essi sufficiente un campionamento a frequenza di simbolo, in virtù del criterio di Nyquist per l'eliminazione dell'interferenza intersimbolica, sono esenti da dispersione. La limitazione appena espressa non ha più ragione di essere se si pensa di operare su un canale implicitamente dispersivo o difficilmente equalizzabile. Le problematiche di sincronizzazione nel ricevitore sono state volutamente tralasciate in quanto non aderenti agli obiettivi specifici del lavoro. Allo stesso modo si è tralasciato di approfondire le difficoltà pratiche inerenti l'impiego di un filtro a radiofrequenza che limiti l'occupazione spettrale del segnale distorto non linearmente che si trasmette sul canale fisico, il quale deve rispettare le specifiche delle normative internazionali sulla emissione a radiofrequenza (maschere di emissione).

La valutazione analitica di prestazioni, da noi seguita nel capitolo 3, consente

in primo luogo di derivare una maggiorazione della probabilità d'errore a coppie (3.17) già nota in letteratura; il calcolo viene esplicitamente sviluppato al doppio fine di convalidare ulteriormente l'ottimalità del ricevitore appena descritto e di enfatizzare l'importante concetto che la relazione tra le prestazioni ed il rumore non dipende affatto dalla banda del filtro di ricezione ma solo dalla densità spettrale del rumore termico, che è un parametro indipendente dall'architettura del ricevitore; ciò è una conseguenza della tecnica di sovracampionamento impiegata. La dimostrazione del fatto che la proprietà di errore uniformemente distribuito sui simboli di costellazione non è applicabile ai canali non lineari mostra come alcuni simboli di costellazione siano più "vulnerabili" rispetto ad altri. A questo proposito sarebbe possibile prendere in considerazione l'adozione di codici "ad-hoc", per il canale non lineare, che alterino le probabilità a priori dei simboli trasmessi, al fine di minimizzare la probabilità di errore media.

Le numerose semplificazioni assunte nel seguito del capitolo 3 risultano utili ai fini dell'identificazione dei principali parametri da cui le prestazioni di un sistema non lineare dipendono: impulso di trasmissione, grado di non linearità e costellazione di simboli. Le semplificazioni suddette vengono poi riprese nel capitolo 4, nella simulazione del sistema di trasmissione, al fine di validare le speculazioni teoriche e di identificare quantitativamente l'entità dei guadagni ottenibili, sia nel caso di canale con non linearità cubica che a limitatore. Il primo notevole risultato numerico, in accordo con la valutazione analitica, è che la presenza di non linearità non sempre degrada le prestazioni del sistema ma anzi esistono margini di miglioramento delle prestazioni, anche significativi nel caso di costellazioni con pochi simboli [28].

Il § 3.3 rappresenta un approccio originale alla valutazione delle prestazioni di un ricevitore convenzionale impiegato su canale non lineare. Pur non essendo stato approfondito mediante simulazione, lo studio condotto consente di fare alcune interessanti osservazioni, quale ad esempio la diversità della probabilità d'errore a coppie per coppie sequenza trasmessa – sequenza stimata scambiate di ruolo, sulla configurazione presa in esame. Tali osservazioni hanno una validità

del tutto generale per i casi in cui il ricevitore impiegato sia progettato sulla base di una rappresentazione incompleta del canale reale.

Le limitazioni introdotte nei capitoli 3 e 4, in particolare l'assenza di interferenza intersimbolica, vengono superate nel capitolo 5 sia dal punto di vista simulativo che teorico. I risultati delle simulazioni mostrano un notevole margine di guadagno ottenibile dal sistema non lineare, confermando le congetture espresse in [29], secondo le quali la presenza congiunta di non linearità e dispersività temporale apporta benefici al sistema in modo analogo a quanto accade nei sistemi ottici in cui i due effetti congiunti consentono l'instaurazione del regime di propagazione solitonico (l'effetto dispersivo è dovuta alla dispersione cromatica). Il confronto di prestazioni viene costantemente operato con un sistema lineare ottenuto tramite una perfetta predistorsione del dispositivo non lineare che mantenga la stessa potenza di picco in uscita. Ciò rappresenta un approccio pragmatico in quanto la presenza di un singolo dispositivo ad elevata potenza non consente mai di superare tale livello di potenza di picco.

Sempre nel capitolo 5, viene estesa l'analisi teorica delle prestazioni a sistemi non lineari dispersivi nel tempo. Pur impiegando un concetto noto, quale lo *spettro delle distanze*, si dimostra un risultato scarsamente evidenziato nella letteratura tecnica esistente; e cioè che il solo parametro di *distanza minima* non consente, al contrario del caso di canali lineari, di fornire un'adeguata approssimazione delle prestazioni ottenibili su canale non lineare ai tassi d'errore di interesse pratico [30].

Al termine del capitolo 5 viene esaminato, da un punto di vista puramente simulativo, l'impiego di un fattore di back-off sul dispositivo non lineare impiegato nel sistema dispersivo, evidenziando come l'impiego di back-off non consenta di raggiungere le prestazioni ottenibili dal ricevitore ottimo con non linearità utilizzata nella sua intera dinamica.

La conclusione ultima del presente lavoro può sintetizzarsi nella seguente affermazione: in un canale che impieghi un dispositivo non lineare con limitazione sulla potenza di picco in uscita, ai tassi d'errore di interesse applicativo

esiste un notevole margine di guadagno di potenza (dell'ordine di qualche dB) ottenibile tramite l'impiego di un ricevitore ottimo a stima di sequenza (per esempio, quello da noi proposto) rispetto alle prestazioni ottenibili tramite una perfetta predistorsione del dispositivo non lineare. Ribadiamo che altri aspetti limitativi di tale approccio (sincronizzazione, variazione nel tempo del canale, realizzazione dei filtri a radiofrequenza) non vengono qui presi in considerazione ai fini del confronto, in quanto estranei agli obiettivi della presente tesi.



# Bibliografia

- [1] S. Benedetto, E. Biglieri, V. Castellani, *Digital Transmission Theory*, Prentice-Hall, 1987.
- [2] N. M. Blachman, “Detectors, Bandpass Nonlinearities, and Their Optimization: Inversion of the Chebyshev Transform”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-17, pp.398-404, July 1971.
- [3] A. R. Kaye, D. A. George and M. J. Eric, “Analysis and Compensation of Bandpass Nonlinearities for Communications”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-20, pp.965-972, October 1972.
- [4] M. C. Jeruchim, P. Balaban, K. S. Shanmugan, *Simulation of Communication Systems*, Plenum Press, 1992.
- [5] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1992.
- [6] D. R. Hummels and R. D. Gitchell, “Equivalent Low-Pass Representation for Bandpass Volterra Systems”, *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp.140-142, January 1980.
- [7] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975.
- [8] W. D. Rummler, “A New Selective Fading Model: Application to Propagation Data”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 58, pp.1037-1071, May-June 1979.

- [9] M. F. Mesiya, P. J. McLane and L. L. Campbell, "Maximum Likelihood Sequence Estimation of Binary Sequences Transmitted Over Bandlimited Nonlinear Channels", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-25, pp.633-643, July 1977.
- [10] W. van Etten and F. van Vugt, "Maximum Likelihood Receivers for Data Sequences Transmitted over Nonlinear Channels", *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik (AEÜ)*, vol.34, pp.216-223, 1980.
- [11] G. D. Forney, "Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp.363-378, May 1972.
- [12] G. M. Vachula and F. S. Hill, "On Optimal Detection of Band-Limited PAM Signals with Excess Bandwidth", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp.886-890, June 1981.
- [13] K. Hamied and G. L. Stüber, "A Fractionally Spaced MLSE Receiver", *Proc. ICC '95*, pp.7-11, 1995.
- [14] H. Meyr, M. Oerder and A. Polydoros, "On Sampling Rate, Analog Prefiltering, and Sufficient Statistics for Digital Receivers", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-42, pp.3208-3214, Dec. 1994.
- [15] G. Ungerboeck, "Adaptive Maximum-Likelihood Receiver for Carrier-Modulated Data-Transmission Systems", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-22, pp.624-636, May 1974.
- [16] V. K. Dubey and D. P. Taylor, "Maximum Likelihood Sequence Detection for QPSK on Nonlinear, Band-Limited Channels", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-34, pp.1225-1235, December 1986.
- [17] A. Gutierrez and W. E. Ryan, "The Performance of MLSD Receivers on Nonlinear Satellite Channels", *Proc. ICC '96*, pp.921-925, 1996.
- [18] V. K. Bhargava, D. Haccoun, R. Matyas, P. P. Nuspl, *Digital Communications by Satellite*, Wiley and sons, 1981.

- [19] A. A. M. Saleh, "Frequency-Independent and Frequency-Dependent Nonlinear Models of TWT Amplifiers", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, pp.1715-1720, November 1981.
- [20] D. D. Falconer, "Adaptive Equalisation of Channel Nonlinearities in QAM Data Transmission Systems", *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 57, pp.2589-2611, September 1978.
- [21] E. Del Re, *Elementi di elaborazione numerica dei segnali*, Pitagora Editrice, Bologna.
- [22] A. B. Carlson, *Communication systems*, McGraw-Hill International Editions, 1986.
- [23] M. G. Mulligan and S. G. Wilson, "An Improved Algorithm for Evaluating Trellis Phase Codes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-30, pp.846-851, November 1984.
- [24] A. Bozzardi, "Analisi delle prestazioni di un nuovo ricevitore a stima di sequenza per trasmissioni numeriche su canali non lineari", tesi di laurea in Ingegneria Elettronica, Università di Parma, 1997.
- [25] S. Benedetto, E. Biglieri and R. Daffara, "Performance of Multilevel Baseband Digital Systems in a Nonlinear Environment", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-24, pp.1166-1175, October 1976.
- [26] R. Raheli and A. Vannucci, *Ricevitore a stima di sequenza a massima verosimiglianza per la ricezione di dati seriali trasmessi su canali di comunicazione comprendenti una non linearità polinomiale*, Italtel S.p.A., Milano, Italy, Italian patent n. MI97A 001299, June 1997.
- [27] R. Raheli and A. Vannucci, *Ricevitore a stima di sequenza a massima verosimiglianza in configurazione sub-ottima per la ricezione di dati seriali trasmessi su canali di comunicazione comprendenti una non linearità polinomiale*, Italtel S.p.A., Milano, Italy, Italian patent n. MI97A 001298, June 1997.

- [28] A. Vannucci and R. Raheli, "Nonlinear Channels: Predistortion or Enhanced Detection?", *Submitted to IEEE Intern. Conf. on Universal Personal Commun. (ICUPC '98)*, October 1998.
- [29] K. Metzger, R. Valentin, "Intersymbol Interference Due to Linear and Nonlinear Distortion", *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-44, pp.809-816, July 1996.
- [30] A.Vannucci and R.Raheli "Optimal Sequence Detection Based on Oversampling for Bandlimited Nonlinear Channels", in *Proc. IEEE Intern. Conf. Commun. (ICC '98)*, Atlanta (GE, U.S.A.), June '98.

# Indice delle Figure

1.1	Sistema numerico con amplificatore NL . . . . .	16
1.2	Effetti di AM/AM ed AM/PM su 16-QAM . . . . .	18
1.3	Uscita di BPNL con sinusoide di test . . . . .	19
1.4	Uscita di BPNL con segnale in banda stretta . . . . .	21
1.5	Modello parallelo di BPNL . . . . .	22
1.6	Esempio di approssimazione di curve misurate, con BPNL polinomiale (ordine 5). (a) AM/AM (b) AM/PM . . . . .	28
1.7	Modello banda-base di canale NL . . . . .	30
1.8	Modulo dei coefficienti di dispersione $f_n$ (a) e $\rho_{ij}(b)$ . . . . .	44
2.1	Ricevitore con filtri adattati ai “chips” . . . . .	46
2.2	Ricevitore con filtri adattati ai nuclei di Volterra . . . . .	47
2.3	Un esempio di trellis . . . . .	52
2.4	Sistema con ricevitore MLSE con campionamento a intervallo di simbolo . . . . .	52
2.5	Problema del ricevitore ottimo per sistema NL . . . . .	53
2.6	Sistema con ricevitore ottimo con sovracampionamento . . . . .	54
2.7	Equivalenza del sistema con sovracampionamento con un sistema multicanale . . . . .	57
3.1	Campionamento di Nyquist del segnale differenza . . . . .	67
3.2	Linearizzazione a parità di potenza di picco in uscita . . . . .	74
3.3	Compensazione Feed-Forward di un amplificatore non lineare . . . . .	76

3.4	Costellazioni immagine in uscita da canale (a) non lineare (b) linearizzato . . . . .	77
3.5	Non linearità con uscita identica per piú simboli . . . . .	78
3.6	Sistema PAM non lineare senza intersimbolo . . . . .	79
3.7	Sistema (equivalente banda-base) con canale non lineare o linearizzato . . . . .	81
3.8	Caratteristiche cubiche al variare di $\xi$ ( $A_M = \alpha_1 = 1$ ) . . . . .	84
3.9	Sistema (equivalente banda-base) PAM senza intersimbolo . . . . .	85
3.10	La funzione $u(a, e)$ nel suo intervallo di definizione . . . . .	87
3.11	Alcune interpretazioni della funzione $u(a, e)$ . . . . .	89
3.12	Impulsi di trasmissione $f(t)$ presi in considerazione . . . . .	92
3.13	Probabilità di equivoco al variare di $\xi$ . . . . .	93
3.14	Sistema PAM con canale a larga banda e <i>input back-off</i> $b$ . . . . .	98
3.15	Probabilità di equivoco al variare di IBO per non linearità cubica . . . . .	100
3.16	Caratteristica a limitatore e sua linearizzazione . . . . .	102
3.17	Sistema con caratteristica non lineare a limitatore . . . . .	103
3.18	Probabilità di equivoco al variare di IBO per non linearità a limitatore . . . . .	104
3.19	Ricevitore ottimo per canale lineare impiegato nel caso di canale non lineare . . . . .	107
3.20	Confronto grafico delle probabilità di errore $P_e^{Ott}$ e $P_e^{Sub}$ . . . . .	112
3.21	Modello di canale non lineare e sua approssimazione lineare . . . . .	114
3.22	Modello di canale non lineare senza intersimbolo e sua approssimazione lineare . . . . .	115
3.23	Sistema PAM con canale a larga banda e ricevitore subottimo . . . . .	116
3.24	Probabilità di equivoco per ricevitore subottimo, al variare di IBO; non linearità cubica . . . . .	118
3.25	Probabilità di equivoco per ricevitore subottimo, al variare di IBO; non linearità a limitatore . . . . .	119

4.1	Sistema senza ISI . . . . .	122
4.2	Risposta impulsiva $p(t)$ del filtro di trasmissione. Il tempo è normalizzato alla durata dell'intervallo di simbolo $T$ . . . . .	124
4.3	Funzione di trasferimento del filtro di trasmissione. La frequenza è normalizzata alla frequenza di segnalazione $f_s = \frac{1}{T}$ ; il ritardo di gruppo è espresso in numero di campioni presi ad intervallo di campionamento (DELTA) . . . . .	125
4.4	Diagramma ad occhio dopo il filtro di trasmissione. Il tempo è espresso in numero di campioni, per cui un intervallo di simbolo $T$ equivale a 16 campioni . . . . .	126
4.5	Curve di probabilità di errore sul simbolo per 4-PAM (a), 8-PAM (b), 16-PAM (c) . . . . .	128
4.6	Sistema senza ISI . . . . .	130
4.7	Curva AM/AM per NL a limitatore . . . . .	131
4.8	Diagramma ad occhio prima (a) e dopo (b) il filtro di ricezione con $GIN = 2$ . . . . .	132
4.9	Spettri prima e dopo la NL (a) e all'uscita del filtro di ricezione (b) con $GIN = 2$ e modulazione 8-PAM. Il valore a centrobanda è stato normalizzato a 0 dB . . . . .	133
4.10	Curve di probabilità d'errore sul simbolo per 4-PAM (a), 8-PAM (b) e 16-PAM (c) con 16 campioni per intervallo di simbolo . . .	135
4.11	Curve di probabilità d'errore sul simbolo per 4-PAM (a), 8-PAM (b) e 16-PAM (c) con 32 campioni per intervallo di simbolo . . .	137
5.1	Sistema con canale a banda stretta . . . . .	143
5.2	Diagramma di dispersione prodotto dal modulatore 16-QAM . .	144
5.3	Diagramma di dispersione continuo all'ingresso della NL e cerchio di raggio pari al modulo del segnale in ingresso necessario per fare lavorare la NL in saturazione . . . . .	145

5.4	Curva AM/AM (a) e AM/PM (b) della NL Italtel, della sua approssimazione al terzo ordine e della sua linearizzazione . . .	146
5.5	Risposta all'impulso $f(t)$ del sistema senza NL . . . . .	148
5.6	Probabilità d'errore per sistema con NL cubica . . . . .	151
5.7	Spettro delle distanze nel caso di sistema linearizzato (a) e con non linearità cubica (b) . . . . .	157
5.8	Bounds sulla probabilità di errore per sistema con non linearità cubica . . . . .	159
5.9	Probabilità d'errore per sistema con NL Italtel e ricevitore ottimo per canale cubico . . . . .	162
5.10	Probabilità d'errore per sistema con NL Italtel e ricevitore ottimo per cubica al variare del fattore di back-off . . . . .	164
5.11	Probabilità d'errore per sistema con NL Italtel e ricevitore ottimo per canale lineare al variare del fattore di back-off . . . . .	166